Решение текстовых задач

Грекова Ирина Юрьевна,
старший преподаватель
кафедры естественно-математического образования ПКИРО

При решении этих задач ученик должен продемонстрировать умение применять математические методы для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Для этого необходимо правильно оценить поставленную задачу и безошибочно выполнить расчеты по формулам. Важно правильно интерпретировать полученный результат с учетом реальных жизненных ограничений. Ученик должен выполнить простые арифметические действия и оперировать целыми числами, использовать дроби, проценты, рациональные числа.

Рекомендации:

1. Повторить раздел «Обыкновенные дроби. Пропорции. Процент»
2. Разобрать предложенные ниже решения типовых задач;
3. Решить задачи, помещенные в конце раздела.

Многие задачи имеют созвучные формулировки, но вопросы в них принципиально различны.

ВНИМАТЕЛЬНО ВЧИТЫВАТЬСЯ В ТЕКСТ!

Рассмотрим на примере решение двух задач, очень похожих на первый взгляд.

Обратите внимание на вопрос в каждой задаче.

Округление с недостатком	***Округление с избытком***
Задача 1. В университетскую библиотеку привезли новые учебники по геометрии для 1–3 курсов, по 360 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 9 полок, на каждой полке помещается 25 учебников. Сколько шкафов можно ***полностью*** заполнить новыми учебниками? **Решение.** Всего привезли: 360 · 3 = 1080 учебников по геометрии. В книжном шкафу помещается: 25 · 9 = 225 учебников.	**Задача 2.** В университетскую библиотеку привезли новые учебники по геометрии для 1–3 курсов, по 360 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 9 полок, на каждой полке помещается 25 учебников. Сколько потребуется шкафов, чтобы разместить ***все*** новые ***учебники***? **Решение.** Всего привезли: 360 · 3 = 1080 учебников по геометрии. В книжном шкафу помещается: 25 · 9 = 225 учебников.

Разделим 1080 на 225: $\frac{1080}{225} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$ Значит, ***<u>полностью</u>*** можно будет заполнить <u>4 шкафа</u>. **Ответ.** 4.	Разделим 1080 на 225: $\frac{1080}{225} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$. Значит, чтобы разместить ***<u>все</u>*** новые ***<u>учебники</u>*** потребуется <u>5 шкафов.</u> **Ответ.** 5.

При решении задач ***<u>на проценты</u>*** очень эффективным бывает использование пропорций. Главное, определить, какую величину примем за 100%. Обычно это либо показатель, который потом изменялся (например, цена до распродажи или оптовая цена, которую потом переводили в розничную), либо показатель с которым сравнивают другой показатель (например, два числа).

При этом формулировки условий также часто очень похожи.

Рассмотрим еще две задачи.

Задача 3. Оптовая цена учебника 170 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 рублей? **Решение.** Оптовую цену учебника принимаем за 100%. Можно вычислить розничную цену, составив пропорцию: 170 руб. – 100% x руб. – (100 + 20)% Отсюда: $x = \frac{170 \cdot 120}{100} = 204$ (руб.)- розничная цена. Разделим 7000 на 204: $\frac{7000}{204} = 34{,}3$ (учебника) Опять имеем округление с недостатком, значит, можно будет купить 34 учебника. **Ответ.** 34.	**Задача 4.** Розничная цена учебника 180 рублей, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 10 000 рублей? **Решение.** Вновь принимаем за 100% оптовую цену учебника, которая фактически неизвестна. Розничную цену можно выразить, составив пропорцию: x руб. – 100% 180 руб. – (100 + 20)% Отсюда: $x = \frac{180 \cdot 100}{120} = 150$ (руб.) – оптовая цена Т.к. $\frac{10000}{150} = 66{,}7$(учебника) то можно купить 66 учебников. **Ответ.** 66.

Задача 5. Свежие фрукты содержат 78% воды, а сухие – 12% воды. Сколько кг сухофруктов получится из 40кг свежих фруктов?

Решение. 1 способ.

Найдем массу сухих фруктов, для этого из 40кг. свежих фруктов удалим 78% воды:

40 кг. – 100%

x кг. – 78%

$x = \frac{40 \cdot 78}{100}$ = 31,2 (кг.)- вода в свежих фруктах;

40кг – 31,2кг. = 8,8кг. – масса сухих фруктов (или сухого вещества).

С другой стороны, 100% сухофруктов состоят из 12% воды и 88% сухого вещества или 8,8кг.

Значит, 8,8кг составляет 88% от всего веса сухофруктов, т.е.

8,8кг. – 88%

x кг. – 100%

$x = \frac{8{,}8 \cdot 100}{88}$ =10 (кг).

2 способ.

40 кг свежих фруктов содержат 78% воды и 22% сухого вещества или

40 · 0,78 = 31,2(кг)

40 · 0,22 = 8,8(кг)

40кг = 31,2кг + 8,8кг

общий вес вода сухое кол-во

Сухофрукты состоят из 12% воды и 88% сухого вещества или 8,8кг.

Значит, 8,8кг составляет 88% от всего веса сухофруктов, т.е. 10(кг)

Ответ. 10 кг

3. Разные задачи.

Задача 6. Поезд Новосибирск-Красноярск отправляется в 15:20, а прибывает в 4:20 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Решение. В день отправления поезд едет

$$(24 - 15) \cdot 60 - 20 = 9 \cdot 60 - 20 = 520 \text{ минут},$$

а на следующий день до момента прибытия он едет

$$4 \cdot 60 + 20 = 260 \text{ минут}.$$

Всего в пути поезд проведет 520 + 260 = 780 минут.

Разделим 780 на 60, получим 13 часов.

Значит, поезд находится в пути 13 часов.

Ответ. 13

Примечание. Через 12 часов от момента отправления поезда будет 3:20, значит, поезд идет 13 часов.

Задача 7. В обменном пункте 1 гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.

Решение. За 3 кг помидоров отдыхающие заплатили $4 \cdot 3 = 12$ гривен. Здесь тоже можно составить пропорцию:

1 гривна – 3,7 рубля

12 гривен – x рублей

$x = \frac{12 \cdot 3{,}7}{1} = 44{,}4$ (руб.)

Округляем до целого числа, получаем 44. **Ответ.** 44

В этой группе задач часто можно встретить ситуации, связанные с переводом системных и несистемных единиц. Метод пропорций здесь работает идеально.

Задача 8. В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 10 человек следует взять 1/10 фунта чернослива. Сколько граммов чернослива следует взять для пирога, рассчитанного на 3 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Решение. 1). Определим, сколько граммов чернослива в $\frac{1}{10}$ фунта:

1 фунт – 0,4кг. (400г.)

$\frac{1}{10}$ фунта – x г., следовательно, $x = \frac{\frac{1}{10} \cdot 400}{1} = 40$ (г.)

2). Эти 40 граммов чернослива потребуются для пирога на 10 человек. Найдем, сколько чернослива необходимо для 3 человек:

10чел. – 40г.

3чел. – x г. отсюда $x = \frac{3 \cdot 40}{10} = 12$ (г.)

Ответ. 12

Текстовые задачи

Задание № 11 предполагает умение выпускника строить и исследовать простейшие математические модели. Основные группы задач, представленные в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ 2017 года:

1. Задачи на движение:

- по прямой (навстречу и вдогонку);
- по замкнутой круговой трассе;
- по воде;
- на среднюю скорость;
- протяженных тел.

2. Задачи на производительность.

3. Задачи на проценты, концентрацию, части и доли

4. Задачи на прогрессии.

1. Задачи на движение

При решении задач на движение принимают такие допущения:

- движение считается равномерным, если нет специальных оговорок; изменение направления движения и переходы на новый режим движения считаются происходящими мгновенно;
- если два тела начинают движение одновременно (если одно тело догоняет другое), то в случае, если они встречаются, каждое тело с момента выхода и до встречи затрачивает одинаковое время;
- если тела выходят в разное время, то до момента встречи из них затрачивает время больше то, которое выходит раньше;
- все величины, как правило, положительные (в природе скорость расстояние и время положительны), поэтому можно смело умножать, делить и возводить в квадрат получающиеся уравнения и неравенства, не делая необходимых в таких случаях оговорок;

Скорость v	**Время** t	**Расстояние** s
$v = \frac{s}{t}$	$t = \frac{s}{v}$	$S = v \cdot t$

После внесения данных, нужно составить уравнения, содержащие искомую величину, исходя из условий задачи.

Задача 1. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 77 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть скорость велосипедиста в первый день – x км/ч. Составим таблицу для каждого дня:

	Скорость	Время	Расстояние
Из A в B	x	$\frac{77}{x}$	77
Из B в A	$x + 4$	$\frac{77}{x+4}$	77

Время движения из A в B на 4 часа больше, чем время из B в A. Отсюда уравнение:

$$\frac{77}{x} - \frac{77}{x+4} = 4$$

$$77(x + 4) = 77x + 4x(x + 4)$$

$$4x^2 + 16x - 308 = 0$$

Получили корни: -11 и 7. Корень -11 не удовлетворяет условию задачи, так как скорость не может быть отрицательной. Следовательно, скорость велосипедиста равна 7 км/ч. **Ответ.** 7 км/ч.

Задачи на ***<u>движение навстречу друг другу и движение вдогонку.</u>***

В первой модели рассматривается совместная скорость сближения, как сумма двух скоростей и поэтому время сближения считается по формуле (1):

$$\boldsymbol{t = \frac{s}{v_1 + v_2}}$$

Во второй модели время, за которое объект, идущий сзади с большей скоростью v_1, догонит другой объект, идущий с меньшей скоростью v_2, считается по формуле (2):

$$\boldsymbol{t = \frac{s}{v_1 - v_2}},$$

где S - расстояние между объектами в начальный момент времени.

Задача 2. Расстояние между городами *A* и *B* равно 435 км. Из города *A* в город *B* со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города *B* выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города *A* автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Решение. Расстояние, которое преодолели оба автомобиля, двигаясь одновременно равно: 435 км. – 60 км. = 375 км.

Время их движения навстречу друг другу до встречи рассчитаем по формуле (1):

$$t = \frac{375}{60+65} = 3(\text{ч})$$

за это время первый автомобиль проехал: 60·3 = 180 (км),

а расстояние от города А до встречи: 180 + 60 = 240 (км).

Ответ. 240.

Задача 3. Два пешехода отправляются из аптеки в одном направлении на прогулку по набережной. Скорость первого на 0,5 км/ч больше скорости второго. Найдите время в минутах, когда расстояние между ними станет 200 м.

Решение. Разность скоростей пешеходов $(v_1 - v_2)$ **задана условием задачи и равна 0,5 км/ч. Поэтому в**ремя (в часах), за которое расстояние между пешеходами будет равно 200 м, т.е. 0,2 км, рассчитаем по второй формуле:

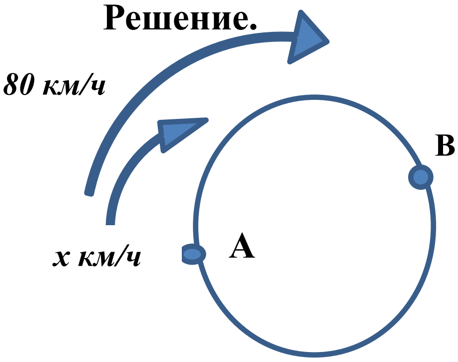
$$t = \frac{0,2}{0,5} = 0,4(ч).$$

Переведем время из часов в минуты: $0,4$ ч. $= \frac{4}{10} = \frac{24}{60} = 24$мин. **Ответ.** 24.

<u>Движение по замкнутой трассе</u> (например, по стадиону) похоже на движение вдогонку. Если два бегуна начинают двигаться по окружности одновременно с разными скоростями, соответственно v_1 и v_2, то первый бегун приближается ко второму бегуну со скоростью (v_1 — v_2) и в момент, когда первый бегун догоняет второго бегуна, то первый бегун как раз проходит на один круг больше второго. И поэтому время считается так же. Как и в случае прямолинейного движения вдогонку (т.е. по формуле (2)).

Задача 4. Из *<u>одной</u>* точки круговой трассы, длина которой равна 16 км, в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч и через 40 минут после старта, он опережает второй автомобиль ровно на один круг. Найдите скорость второго автомобиля.

Решение.



Автомобили начали свое движение одновременно из точки А. Примем скорость второго автомобиля за x км/ч и учтем, что 40 минут составляют $\frac{2}{3}$ часа, тогда:

	v	S	t
1-й автомобиль	80	$\frac{2}{3}\cdot 80$	$\frac{2}{3}$
2-й автомобиль	x	$\frac{2}{3}\cdot x$	$\frac{2}{3}$

Первый автомобиль догнал второго в точке В, опередив его на целый круг, следовательно, расстояние, пройденное им больше расстояния второго автомобиля на 16 км. Отсюда уравнение:

$$\frac{2}{3}\cdot 80 - \frac{2}{3}\cdot x = 16$$

$$80 - x = 24$$

$$x = 56 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ. 56

Задача 5. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из *двух диаметрально противоположных точек* круговой трассы, длина которой равна 19 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 15 км/ч больше скорости другого?

Решение. Примем скорость второго автомобиля за x км/ч. Тогда:

	v	***S***	***t***
1-й мотоциклист	$x + 15$	$t \cdot (x + 15)$	t
2-й мотоциклист	x	$t \cdot x$	t

Так как первый мотоциклист опередил второго на половину круга, его расстояние больше расстояния второго мотоциклиста на $\frac{19}{2}$ км. Отсюда уравнение:

$$t \cdot (x + 15) - t \cdot x = \frac{19}{2}$$

$$t \cdot 15 = \frac{19}{2}$$

$$t = \frac{19}{30} = \frac{38}{60} \text{ (часа)} = \text{(38 минут)}.$$

Ответ. 38

Задача 7. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 22 круга по кольцевой трассе протяжённостью 3 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 11 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 10 минут? Ответ дайте в км/ч.

Решение. Обозначим: $\boldsymbol{x}$ км/ч и $\boldsymbol{y}$ км/ч – скорости первого и второго гонщиков соответственно. Очевидно, что для решения задачи потребуется составление системы уравнений с двумя неизвестными.

Составим первое уравнение системы, используя тот факт, что первый гонщик в первый раз обогнал второго гонщика на круг через 10 минут.

Переведем минуты в часы: 10 минут = $\frac{10}{60}$ часа = $\frac{1}{6}$ часа.

	v(км/ч)	***S(км)***	***t(ч)***
1-й гонщик	$\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{6}\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{6}$
2-й гонщик	$\boldsymbol{y}$	$\frac{1}{6}\boldsymbol{y}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y = 3$, отсюда $x - y = 18$

Второе уравнение системы вытекает из условия, что первый гонщик преодолел 22 круга финишу на 11 минут быстрее второго, то есть время движения второго гонщика на 11 минут больше.

11 минут = $\frac{11}{60}$ часа.

	v(км/ч)	*S(км)*	*t(ч)*
1-й гонщик	$\boldsymbol{x}$	$3\cdot 22$	$\frac{3\cdot 22}{\boldsymbol{x}}$
2-й гонщик	$\boldsymbol{y}$	$3\cdot 22$	$\frac{3\cdot 22}{y}$

$$\frac{3\cdot 22}{x} - \frac{3\cdot 22}{y} = \frac{11}{60}$$

$$\frac{66}{x} - \frac{66}{y} = \frac{11}{60}$$

$$6\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{60}$$

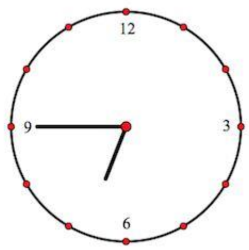
Получаем систему: $\begin{cases} x - y = 18 \\ 6\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{60} \end{cases} \Rightarrow \frac{6\cdot 18}{y(18+y)} = \frac{1}{60}$

$$y^2 + 18y - 6\cdot 60\cdot 18 = 0,$$

$$y_1 = 72,\ y_2 < 0$$

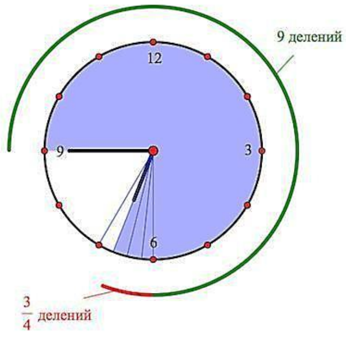
Ответ. 72

Задача 7. Часы со стрелками показывают 6 часов 45 минут. Через сколько минут минутная стрелка в пятый раз поравняется с часовой?



Решение. За одно и тоже время минутная и часовая стрелки проходят разные расстояния.

На начало наблюдения минутную и часовую стрелки отделяет $9 + \frac{3}{4} = 9{,}75$делений.



Например, минутная стрелка в первый раз догонит часовую, когда пройдет 9,75 делений и еще то расстояние (количество делений), которое пройдет часовая стрелка до момента встречи с минутной.

Пусть $\boldsymbol{x}$ делений – путь, который проделает часовая стрелка, пока ее пятый раз догоняет минутная.

Тогда минутная: $\boldsymbol{x} + 4 \cdot 12 + 9{,}75$ делений.

	$\boldsymbol{v}$ $(\frac{\text{делений}}{\text{час}})$	$\boldsymbol{S}$ (делений)	$\boldsymbol{t}$ (час)
Часовая стрелка	1	x	$\frac{x}{1}$
Минутная стрелка	12	$x + 4 \cdot 12 + 9{,}75$	$\frac{x + 4 \cdot 12 + 9{,}75}{12}$

Время движения обеих стрелок одинаково, следовательно,

$$\frac{x + 4 \cdot 12 + 9{,}75}{12} = \frac{x}{1}$$

$$x + 57{,}75 = 12x$$

$$11x = 57{,}75$$

$$x = 5{,}25$$

5,25 делений = 5,25 часа = 5,25 $\cdot$ 60 минут = 315 минут.

Ответ. 315

В задачах на ***<u>движение по воде</u>*** скорость реки считается постоянной и неизменной.

При движении <u>по течению</u> скорость реки прибавляется к собственной скорости плывущего тела, так как скорость реки помогает двигаться телу.

$$v_{\textbf{по течению}} = v_{\textbf{ собств.}} + v_{\textbf{против течения}}$$

При движении <u>против течения</u> от собственной скорости вычитается скорость реки (реально собственная скорость тела больше скорости реки), так как в этом случае скорость реки мешает движущемуся телу.

$$v_{\textbf{против течения}} = v_{\textbf{ собств.}} - v_{\textbf{против течения}}$$

Скорость плота считается равной скорости реки.

Замечание 1.

Разность скоростей по течению и против течения реки равна удвоенной скорости течения:

$$v_{\textbf{по течению}} - v_{\textbf{против течения}} = 2v_{\textbf{теч.}}$$

Замечание 2.

Формула нахождения собственной скорости тела.

$$v_{\textbf{ собств.}} = \frac{2v_{\text{по течению}} + v_{\text{против течения}}}{2}$$

Задача 8. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длилась 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Определить сколько километров теплоход прошел за весь рейс.

Решение. Заполним таблицу данными из условия задачи:
собственная скорость теплохода $v_с = 25$км/ч ,
скорость течения реки $v_{теч} = 3$ км/ч,
$v_{\text{ по течению}} = v_с + v_{теч.} = 28$ км/ч,
$v_{\text{ против течения}} = v_c - v_{теч} = 22$ км/ч.

	v	**s**	***t***
по течению	28	x	$\frac{x}{28}$
против течения	22	x	$\frac{x}{22}$

Зная, что стоянка длилась 5 часов, а на весь путь затрачено 30 часов, составим уравнение: $\frac{x}{28} + \frac{x}{22} + 5 = 30$

Решая его, получим $x = 308$ км. Это путь туда и обратно. Следовательно, искомый путь вдвое короче, т.е. 616 километров.

Ответ. 616

В задачах на ***<u>движение протяжных тел</u>*** требуется определить длину одного из них.

Наиболее типичные ситуации, предлагаемые в задачах на движение протяженных тел: определить длину поезда проезжающего мимо:

- придорожного столба
- идущего параллельно путям пешехода
- лесополосы определенной длины
- другого двигающегося поезда

Рассмотрим каждую ситуацию. Помним, что во всех задачах на движение, включенных в ЕГЭ, используется только одна формула: это формула пути

$$\boldsymbol{S = v \cdot t}$$

Мимо неподвижного столба: Если поезд движется мимо столба, то он проходит <u>расстояние равное его длине</u>.

Обозначим: l – длина поезда
v – скорость поезда

$$\boldsymbol{l = v \cdot t}$$

Мимо лесополосы: Если поезд движется мимо протяженной лесополосы, то он проходит расстояние равное сумме длины самого поезда и лесополосы.

Обозначим: l_1 – длина поезда

l_2 – длина лесополосы

v – скорость поезда

$$l_1 + l_2 = v \cdot t$$

Мимо движущегося человека: Учитываем направление движения человека. Если он движется навстречу, то скорости складываются, если в одну сторону, то находим разность скоростей.

Обозначим: l – длина поезда

v_1– скорость поезда

v_2 – скорость человека

В одну сторону: $l = (v_1 - v_2) \cdot t$

В разные стороны: $l = (v_1 + v_2) \cdot t$

Мимо движущегося поезда: Учитываем направление движения второго поезда. Если он движется навстречу, то скорости складываются, если в одну сторону, то находим разность скоростей.

Обозначим: l_1 – длина первого поезда

l_2 – длина второго поезда

v_1– скорость первого поезда

v_2 – скорость второго поезда

В одну сторону: $l_1 + l_2 = (v_1 - v_2) \cdot t$

В разные стороны: $l_1 + l_2 = (v_1 + v_2) \cdot t$

Задача 9. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 30 секунд. Найти длину поезда в метрах.

Решение. Зная скорость движения

$\boldsymbol{v}$ = 60 км/ч = 1000 м/мин

и время, за которое он проезжает мимо столба

$\boldsymbol{t}$ = 30 сек. = 21мин,

можно найти длину поезда как пройденное расстояние:

S = $v \cdot t$ = 1000 · 21 = 500 (м).

Ответ. 500

Задача 10. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которого 800 метрам, за 1 минуту. Найти длину поезда в метрах.

Решение. Зная скорость движения

$\boldsymbol{v}$ = 90 км/ч = 1500 м/мин

и время, за которое он проезжает мимо лесополосы длиной 800 метров за $\boldsymbol{t}$ = 1мин, можно найти пройденное расстояние:

$$S = v \cdot t = 1500 \cdot 1 = 1500 \text{ (м)}$$

Это собственная длина поезда плюс длина лесополосы. Длина поезда равна:

$$1500 - 800 = 700 \text{ (м)}.$$

Ответ. 700

Задача 11. По двум параллельным железнодорожным путям *в одном направлении* следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

Решение. Так как поезда двигаются в *одном* направлении, их относительная скорость равна:

$$v = (90 - 30)\text{км/ч} = 60\text{км/ч} = \frac{50}{3} \text{ м/с}.$$

За 60 секунд один поезд проходит мимо другого, то есть преодолевает расстояние:

$$S = \frac{50}{3} \cdot 60 = 1000 \text{ м}.$$

Это длина пассажирского и товарного поездов.

Тогда длина пассажирского поезда равна: 1000 – 600 = 400 (м).

Ответ. 400

Задача 12. По двум параллельным железнодорожным путям *друг навстречу другу* следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 65 км/ч и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 700 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

Решение. Так как поезда двигаются в *противоположных* направлениях, их относительная скорость равна:

$$v = (60 + 35)\text{км/ч} = 100 \text{ км/ч} = \frac{1000}{36} \text{ м/с}.$$

За 36 секунд один поезд проходит мимо другого, то есть преодолевает расстояние:

$$S = \frac{1000}{36} \cdot 36 = 1000 \text{ (м)}.$$

Это расстояние, равное сумме длин обоих поездов, значит, длина скорого поезда равна:

$$1000 - 700 = 300 \text{ (м)}.$$

Ответ. 300

<u>Задачи на нахождение средней скорости движения.</u>

Если **S** – путь пройденный телом, а **t** – время за которое этот путь пройден, то средняя скорость вычисляется по формуле:

$$v = \frac{s}{t}$$

Если путь состоит из <u>нескольких</u> участков, то для нахождения средней скорости на всем пути, надо весь пройденный путь разделить на сумму времени, затраченного на каждый участок пути.

Например, если путь состоит из трех участков S_1, S_2, S_3, скорости на которых были соответственно равны v_1, v_2, v_3, а время прохождения каждого участка соответственно t_1, t_2, t_3, то средняя скорость прохождения всех трех участков вычисляется по формуле:

$$v_{\text{средняя}} = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3}$$

Задача 13. Первую треть трассы велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, вторую треть - со скоростью 16 км/ч, а последнюю треть — со скоростью 24 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути.

Решение. Пусть *S* км – длина каждого участка трассы

	S	***v***	***t***
1-й участок	***S***	**12**	$\frac{s}{12}$
2-й участок	***S***	**16**	$\frac{s}{16}$
3-й участок	***S***	**24**	$\frac{s}{24}$
Сумма	**3*S***		$\frac{s}{12}+\frac{s}{16}+\frac{s}{24}$

Получили: весь путь равен **3S км**,

время потраченное на весь путь:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{12} + \frac{s}{16} + \frac{s}{24} = \frac{3s}{48}$$

средняя скорость:

$$v = \frac{3s}{\frac{9s}{48}} = 16 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ. 16 км/ч.

Задача 14. Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Занесем все исходные данные в таблицу (расстояния и скорости на каждом участке) и составим выражения для вычисления времени движения на каждом участке:

	S	***v***	***t***
1-й участок	190	**50**	$\frac{190}{50}$
2-й участок	180	**90**	$\frac{180}{90}$
3-й участок	170	**100**	$\frac{170}{100}$
Сумма	**540**		$\frac{190}{50}+\frac{180}{90}+\frac{170}{100}$

Чтобы найти среднюю скорость на протяжении пути, нужно весь путь разделить на все время движения. Средняя скорость автомобиля равна

$$\frac{190+180+170}{\frac{190}{50}+\frac{180}{90}+\frac{170}{100}}=\frac{540}{3,8+2+1,7}=\frac{540}{7,5}=72 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ. 72

2. Задачи на производительность

Задачи на выполнение определенного объема работы по своему решению очень схожи с задачами на движение: объем работы выполняет роль расстояния, а производительность выполняет роль скорости.

В тех случаях, когда объем работы не задан, его принимают за единицу.

Время и производительность – величины обратно пропорциональные, поэтому всегда можно перейти от одной величины к обратной. При этом нужно помнить, что время совместной работы не складывается, а производительность можно сложить и узнать производительность совместной работы.

При решении задач, связанных с выполнением определенного объема работ, используют следующие соотношения:

$\boldsymbol{A = V \cdot t}$, где A - количество всей работы,

$\boldsymbol{t = \frac{A}{V}}$ - время выполнения всего количества работы,

$\boldsymbol{V = \frac{A}{t}}$ - производительность труда, т.е. количество работы, выполненной в единицу времени.

Задачи, связанные с выполнением определенной работы удобно решать, если занести исходные данные в таблицу:

	Производительность V	***Работа A***	***Время t***
1 объект	$V=\frac{A}{t}$	$A=V\cdot t$	$t=\frac{A}{V}$
2 объект			
…			

После внесения данных, нужно составить уравнения, содержащие искомую величину, исходя из условий задачи.

Задача 15. На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение. Обозначим за x – число деталей, которые изготавливает за час второй рабочий. Тогда:

	Производительность	***Объем работы***	***Время***
1 рабочий	$x + 1$	99	$\frac{99}{x+1}$
2 рабочий	x	110	$\frac{110}{x}$

Так как время работы первого рабочего на 2 часа меньше времени второго рабочего, получаем уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2$$

$$\frac{110(x+1)-99x}{x(x+1)} = 2$$

$$\frac{110x+110-99x}{x(x+1)} = 2$$

$$\frac{11x+110}{x(x+1)} = 2$$

$$11x+110 = 2x^2+2x$$

$$2x^2 - 9x - 110 = 0$$

$$x_1 = 10;$$

$$x_2 = -5,5$$

Ответ. 10

Задача 16. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За Сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

Решение. Обозначим x – производительность первого рабочего,

y – второго.

Тогда $(x + y)$ – производительность совместной работы.

Всю работу обозначим 1.

Заполним таблицу:

	Производительность	***Объем работы***	***Время***

1 рабочий	x	$2x$	2
2 рабочий	y	$3y$	3
1 + 2 рабочий	$x + y$	1	12

Получили два уравнения, которые решим совместно: $2x = 3y$

$$12(x + y) = 1$$

Из первого уравнения следует, что $x = 1{,}5\ y$.

Подставим это значение x во второе уравнение: $12 \cdot (1{,}5\ y + y) = 1$

$$12 \cdot 2{,}5\ y = 1$$

$$y = \frac{1}{30}$$

$$x = \frac{1}{20}$$

отсюда следует, что время работы первого рабочего 20 дней, а второго – 30 дней.

Ответ. 20

Задача 17. Игорь и Паша красят забор за 24 часа. Паша и Володя красят этот же забор за 28 часов, а Володя и Игорь — за 56 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Решение. Составим таблицу данных условий задачи:

	Производительность	***Объем работы***	***Время***
Игорь + Паша	$\frac{1}{24}$	1	24
Паша + Володя	$\frac{1}{28}$	1	28
Игорь + Володя	$\frac{1}{56}$	1	56
(Игорь + Паша + Володя)·2	$\frac{1}{24}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$	x	1

За один час Игорь и Паша красят $\frac{1}{24}$ забора, Паша и Володя красят $\frac{1}{28}$ забора, а Володя и Игорь – $\frac{1}{56}$ забора. Это их производительность. Другими словами, за один час покрашено:

$$x = \frac{1}{24} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} = \frac{7+6+3}{168} = \frac{16}{168} = \frac{2}{21} \text{ забора.}$$

Составим соотношение: 1 час $- \frac{2}{21}$ забора

t часов – 1 забор

отсюда: $t = \frac{1 \cdot 1}{\frac{2}{21}} = \frac{21}{2} = 10{,}5$ часов

Поскольку каждый из мальчиков был учтен два раза, то в реальности Игорь, Паша и Володя могут покрасить забор за 21 час**.**

Ответ. 21

Задача 18. Две трубы наполняют бассейн за 4 часа, а одна первая труба наполняет бассейн за 5 часов. Найдите время наполнения бассейна одной второй трубой.

Решение. Заполним таблицу

	V	***A***	***t***
1-я труба	x	1	5
2-я труба	y	1	$\frac{1}{y}$
Две трубы	$x+y$	1	4

Производительность обеих труб обратно пропорциональна времени совместной работы:

$$x + y = \frac{1}{4}.$$

Производительность первой трубы обратно пропорциональна времени ее самостоятельной работы:

$$x = \frac{1}{5}.$$

Решая совместно оба эти уравнения, получаем:

$$\frac{1}{4} + y = \frac{1}{5},$$

$$\text{отсюда } y = \frac{1}{20}.$$

Значит, время наполнения бассейна одной второй трубой 20 часов.

Ответ. 20

3. ***<u>Задачи на проценты, концентрацию, части и доли</u>***

В задачах на проценты необходимо показать умение находить процентное содержание компонентов в сплавах, смесях, рассчитывать сложные проценты, начисляемые несколько раз.

<u>Сложные процент.</u> (или по-другому «процент на процент») – это такое увеличение капитала, когда накопленная за первый период сумма прибавляется к первоначальной, то есть, говоря экономическим языком, первоначальная сумма капитализируется, и в новом периоде процент будет начисляться уже на новую, увеличенную сумму.

1) Пусть некоторая величина $\boldsymbol{A}$ увеличивается в n раз и каждый раз на $\boldsymbol{p}$ %.

Составим соотношение:

$$\left[\begin{matrix} A - 100\ \% \\ x - p\ \% \end{matrix}\right. \Rightarrow x = \frac{A \cdot p}{100} = A \cdot \frac{p}{100}$$

Тогда значение A_1 после первого увеличения находится по формуле

$$\boldsymbol{A_1 = A + A \cdot \frac{p}{100} = A(1 + \frac{p}{100})}$$

При уменьшении на $\boldsymbol{p}$ %: $\boldsymbol{A_1 = A - A \cdot \frac{p}{100} = A(1 - \frac{p}{100})}$

2) При последующем увеличении на $\boldsymbol{p}$ %:

$$\left[\begin{matrix} A_1 - 100\ \% \\ x - p\ \% \end{matrix}\right. \Rightarrow x = \frac{(A + A \cdot \frac{p}{100}) \cdot p}{100} = \frac{Ap + A \cdot \frac{p^2}{100}}{100} = \frac{A \cdot p}{100} + \frac{A \cdot p^2}{100^2} = A \cdot \frac{p}{100} \cdot (1 + \frac{p}{100})$$

$$A_2 = A_1 + x = A(1 + \frac{p}{100}) + A \cdot \frac{p}{100} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \mathrm{A} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$\boldsymbol{A_2 = \mathrm{A} \cdot (1 + \frac{p}{100})^2}$$

3) При увеличении величины A на $\boldsymbol{p}$ % $\boldsymbol{n}$ раз: $\boldsymbol{A_n = \mathrm{A} \cdot (1 + \frac{p}{100})^n}$

4) При увеличении величины A $\boldsymbol{n}$ раз на p_1%, p_2%, p_3%, …, p_n%:

$$\boldsymbol{A_n = A \cdot (1 + \frac{p_1}{100}) \cdot (1 + \frac{p_2}{100}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{p_n}{100})}$$

Задача 19. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

Решение. Пусть x – искомое число. Воспользуемся формулой сложных процентов: $A_n = \mathrm{A} \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

$$21{,}6 = 51{,}2 \cdot (1 + \frac{p}{100})^3 \cdot (1 - \frac{p}{100})^3$$

$$\frac{27}{64} = (1 - (\frac{x}{100})^2)^3$$

$$1 - (\frac{x}{100})^2 = \frac{3}{4}$$

$$(\frac{x}{100})^2 = \frac{1}{4}$$

$x = 50$. **Ответ.** 50%.

Задача 19. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20000 рублей, через два года был продан за 15842 рублей.

Решение. Пусть $A_0 = 20000$ ру4блей – первоначальная цена,

$A_2 = 15842$ рубля – конечная цена,

р % - процент снижения.

Воспользуемся формулой: $\boldsymbol{A_n = \mathbf{A} \cdot (1 + \frac{p}{100})^n}$

$$A_2 = A_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^2$$

$$15842 = 20000 \cdot (1 - \frac{p}{100})^2$$

$$(1 - \frac{p}{100})^2 = \frac{15842}{20000}$$

$$(1 - \frac{p}{100})^2 = \frac{7921}{10000}$$

$$(1 - \frac{p}{100})^2 = \left(\frac{89}{100}\right)^2$$

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{89}{100}$$

$$\frac{p}{100} = \frac{11}{100}$$

$p = 11$ **Ответ.** 11

Задача 20. Какую сумму положили в банк под 22% годовых, если через 5 лет вклад достиг величины $S_5 = 94500$ рублей?

Решение. По условию $p = 22$ %, $n = 5$, $A_5 = 94500$

$$94500 = A_0 \cdot (1 + \frac{22}{100})^5$$

$$94500 = A_0 \cdot (\frac{61}{50})^5$$

$$A_0 = \frac{94500 \cdot 50^5}{61^5}$$

$$A_0 \approx 34965$$

Ответ. 34965 рублей.

Задача 21. Василий кладет в банк 1 000 000 рублей под 10% годовых на 4 года (проценты начисляются один раз после истечения года) с правом докладывать три раза (в конце каждого года) на счет фиксированную сумму 133 000 рублей. Какая сумма будет на счете у Василия через 4 года?

Решение. 1. После первого года хранения вклада:

Сумма вклада возрастает до 1 000 000 · 1,1 = 1 100 000 (р);

Дополнительное пополнение счета 1 100 000 + 133 000 = 1 233 000 (р);

2. После второго года хранения вклада:

Сумма вклада возрастает до 1 233 000 · 1,1 = 1 356 300 (р);
Дополнительное пополнение счета 13 563 000 + 133000 = 1 489 300 (р);

3. После третьего года хранения вклада:

Сумма вклада возрастает до 1 489 300 · 1,1 = 1 638 230 (р);
Дополнительное пополнение счета 1 638 230 + 133 000 = 1 771 230 (р);

4. После четвертого года хранения вклада:

Сумма вклада возрастает до 1 771 230 · 1,1 = 1 948 353 (р).

Ответ. 1 948 353 рубля.

Рассмотрим несколько задач из раздела ***«Сплавы, смеси».***

Задача 22. Сплав меди и цинка весом 20кг содержит 30% меди. Добавили 22кг цинка. Сколько нужно добавить меди, чтобы в сплаве стало 60% цинка.

Решение. *I способ:*

$$20\text{кг} = \underbrace{\overset{30\%}{\underline{6\text{кг}}}}_{Cu} + \underbrace{\overset{70\%}{\underline{14\text{кг}}}}_{Zn}$$

Добавили цинка (+22 кг):

$$42\text{кг} = \underbrace{\underline{6\text{кг}}}_{Cu} + \underbrace{\underline{36\text{кг}}}_{Zn}$$

100% = 40% + 60%

36кг составляет 60%.

36 : 0,6 = 60кг – новый сплав.

$$60(\text{кг}) = \underline{6(\text{кг})} + \underline{36(\text{кг})} + x(\text{кг})$$

$x = 18$ (кг).

Ответ. 18

II способ (табличный):

Очень удобно в задачах на сплавы, смеси, концентрации составлять таблицу. Выделим жирным шрифтом данные из условия задачи, а затем будем заполнять пустые клетки, руководствуясь *законом сохранения массы(объема) и формулами расчета «Процент от числа».*

Для начала нужно занести в таблицу все, что говорится о каждом объекте.

По вопросу задачи вводится переменная.

Пусть ***x*** кг – масса меди.

Объекты	*I*	*добавили цинка*	*добавили меди*	*получили сплав*
масса (кг)	**20**	**22**	**x**	**$20 + 22 + x$**
% меди	**30**		**100**	
% цинка		**100**		**60**
масса меди (кг)				
масса цинка (кг)				

Теперь начинаем заполнение пустых клеток:

Объекты	*I*	*добавили цинка*	*добавили меди*	*получили сплав*
масса (кг)	**20**	**22**	**x**	**$20 + 22 + x = 42 + x$**
% меди	**30**	0	**100**	100 — 60 = 40
% цинка	100 — 30 = 70	**100**	0	**60**
масса меди (кг)	$\frac{20 \cdot 30}{100}$	0	x	$\boxed{\frac{(42+x)\cdot 40}{100} = \frac{20\cdot 30}{100} + 0 + x}$
масса цинка (кг)	$\frac{20 \cdot 70}{100}$	100	0	

Нам достаточно заполнения четырех строк, чтобы составить уравнение. Обратим внимание на «выделенную» клетку — эта клетка является ключом составления уравнения задачи, т.к. мы ее можем заполнить по формуле «40 % от числа $42 + x$», а также по закону сохранения массы: $\frac{20\cdot 30}{100} + 0 + x$.

Следовательно, имеем уравнение: $\frac{(42+x)\cdot 40}{100} = \frac{20\cdot 30}{100} + 0 + x$

$4(42 + x) = 60 + 10x$

$6x = 108$

$x = 18$ **Ответ.** 18

Задача 23. Из 50т руды получают 20т металла, который содержит 12% примесей. Сколько процентов примесей содержит руда?

Решение. 1) Сколько примесей содержится в металле?

$20\cdot 0{,}12 = 2{,}4$(т)

2) 50т = 20т + 30т = (17,6 + 2,4) + 30 = 17,6 + (2,4 + 30)

металл примеси металл примеси чистый металл примеси

составим пропорцию:

3) 50т – 100%

32,4т – x%

$$\frac{50}{32,4} = \frac{100}{x}, \quad \text{отсюда } x = 64,8\%$$

Табличный способ: По первому предложению составляем таблицу

Объект	***I***	***II***	***Смесь***
m (кг)	***x***	**3**	**3 + *x***
% серебра	***p***	**100**	**90**
$m_{серебра}$ ***(кг)***	$\frac{x \cdot p}{100}$	$\frac{3 \cdot 100}{100}$	$\boxed{\frac{(3+x)\cdot 90}{100} = \frac{x \cdot p}{100} + \frac{3 \cdot 100}{100}}$

По второму предложению составляем таблицу

Объект	***I***	***II***	***Смесь***
m (кг)	***x***	**2**	**2 + *x***
% серебра	***p***	**100**	**86**
$m_{серебра}$ ***(кг)***	$\frac{x \cdot p}{100}$	$\frac{2 \cdot 100}{100}$	$\boxed{\frac{(2+x)\cdot 86}{100} = \frac{x \cdot p}{100} + \frac{2 \cdot 100}{100}}$

В результате в «выделенных» клетках имеем уравнения для системы:

$$\begin{cases} xp + 300 = 90(3 + x) \\ xp + 200 = 86(2 + x) \end{cases} \Leftrightarrow 270 + 90x - 172 - 86x = 100 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = 0,5$$

Тогда $0,5p = 15$

$p = 30$

Ответ. 0,5 кг; 30 % серебра.

Существует еще один способ решения задач на сплавы и растворы, это так называемый ***«метод стаканчиков»*** (берутся два стакана с растворами, сливаются в третий, и получается раствор новой концентрации). Фактически это тоже табличный метод, так как мы заносим исходные условия задачи в определенные столбцы и строки. С помощью этого способа легко решаются задачи из № 11 (8 прототипов).

Задача 25. Смешали некоторое количество 15–процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19–процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение. Краткая запись: рисуем три стакана и записываем условие задачи.

В верхней строке – масса раствора (поскольку она не указана, а сказано лишь, что в обоих растворах она одинаковая, можем поставить любую одинаковую величину. Обычно массу обозначают *m*), в средней строке – концентрация вещества (проценты заменяем дробью от числа), а в нижней –

объем вещества, содержащемся в каждом стакане (произведение верхней и средней строк).

m		m		$2m$
15% = 0,15	+	19% = 0,19	=	x% = 0,01x
0,15 m		0,19 m		0,01x·2m

Нижняя строка – это и есть уравнение, с помощью которого находим неизвестную величину.

0,15 m +0,19 m = 0,01x·2m

x = 17% **Ответ.** 17

Рассмотрим более сложную ситуацию.

Задача 26. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение. Обозначим массу первого и второго растворов через x и y:

x кг		у кг		10 кг		(x+y+10) кг
30% = 0,3	+	60% = 0,6	+	0% = 0	=	36% = 0,36
0,3 x		0,6 у		0·10		0,36(x+y+10)

x кг		у кг		10 кг		(x+y+10) кг
30% = 0,3	+	60% = 0,6	+	50% = 0,5	=	41% = 0,41
0,3 x		0,6 у		0,5·10		0,41(x+y+10)

Так как оба условия выполняются одновременно, составим систему:

$$\begin{cases} \mathbf{0,3}\,x + \mathbf{0,6}\,y + \mathbf{0}\cdot\mathbf{10} = \mathbf{0,36}(x + y + \mathbf{10}), \\ \mathbf{0,3}\,x + \mathbf{0,6}\,y + \mathbf{0,5}\cdot\mathbf{10} = \mathbf{0,41}(x + y + \mathbf{10}). \end{cases}$$

Умножив каждое уравнение на 100, раскрыв скобки и приведя подобные, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} -x + 4y = 60, \\ -11x + 19y = -90. \end{cases}$$

Решив систему, получим: x = 60, y = 30.

Ответ. 60

Важно! В некоторых случаях можно применить правило смешения растворов с заданными концентрациями ***(диагональную модель «конверта Пирсона»,*** или, что то же самое***, правило креста***).

Допустим, нужно приготовить раствор определенной концентрации, имея в распоряжении два раствора с более высокой и менее высокой концентрацией, чем нужно нам.

Обозначим: 1). Массу первого раствора через $\mathbf{m_1}$,

а второго – через $\mathbf{m_2}$,

тогда при смешивании общая масса смеси будет слагаться из суммы этих масс.

2). Пусть массовая доля растворенного вещества в первом растворе – $\boldsymbol{\omega_1}$, во втором – $\boldsymbol{\omega_2}$, а в их смеси – $\boldsymbol{\omega_3}$.

3). Тогда общая масса растворенного вещества в смеси будет слагаться из масс растворенного вещества в исходных растворах:

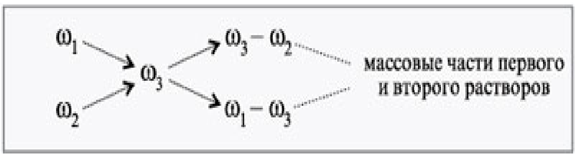
$$m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2 = \omega_3(m_1 + m_2).$$

Отсюда $m_1(\omega_1 - \omega_3) = m_2(\omega_3 - \omega_2)$,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_3}$$

Видно, что отношение массы первого раствора к массе второго раствора есть отношение разности массовых долей растворенного вещества в смеси и во втором растворе к разности соответствующих величин в первом растворе и в смеси.

При решении задач на растворы с разными концентрациями чаще всего применяют диагональную схему правила смешении. При расчетах записывают одну над другой массовые доли растворенного вещества в исходных растворах, справа между ними – его массовую долю в растворе, который нужно приготовить, и вычитают по диагонали из большего меньшее значение. Разности их вычитаний показывают массовые доли для первого и второго растворов, необходимые для приготовления нужного раствора.



Для пояснения этого правила сначала решим простейшую задачу.

Задача 27. Определите концентрацию раствора, полученного при слиянии 150 г 30%-го и 250 г 10%-го растворов какой-либо соли.

Дано: m_1 = 150 г, m_2 = 250 г,

ω_1 = 30%, ω_2 = 10%.

Найти: ω_3.

Решение. ***1-й способ (метод пропорций).***

Общая масса раствора: $m_3 = m_1 + m_2 = 150 + 250 = 400$ г.

Массу вещества в первом растворе находим методом пропорций, исходя из определения: ***процентная концентрация раствора показывает, сколько граммов растворенного вещества находится в 100 г раствора:***

в 100 г 30% раствора – 30 г вещества,

в 150 г 30%-го раствора – x г вещества,

отсюда: $x = \frac{150 \cdot 30}{100} = 45$г.

Для второго раствора составляем аналогичную пропорцию:

в 100 г 10% раствора – 10 г вещества,

в 250 г 10% раствора – y г вещества,

$y = \frac{250 \cdot 10}{100} = 25$г.

Следовательно, 400 г нового раствора содержит 45 + 25 = 70 г растворенного вещества.

Теперь можно определить концентрацию нового раствора:

400 г раствора – 70 г вещества,

100 г раствора – z г вещества,

$z = \frac{100 \cdot 70}{400} = 17{,}5$

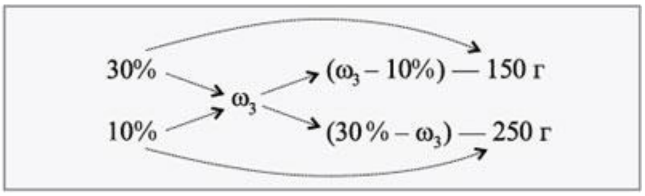
2-й способ (алгебраический).

$$m_1 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot \omega_2 = \omega_3 (m_1 + m_2)$$

Отсюда $\omega_3 = \frac{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2}{m_1 + m_2}$

В результате находим: $\omega_3 = \frac{150 \cdot 30 + 250 \cdot 10}{150 + 250} = 17{,}5\%$

3-й способ (правило креста).



$$\omega_3 = \frac{\omega_3 - 10}{30 - \omega_3} = \frac{150}{250}$$

Тогда $(30 - \omega_3) \cdot 150 = (\omega_3 - 10) \cdot 250$,

$4500 - 150\,\omega_3 = 250\,\omega_3 - 2500$,

$4500 - 2500 = 250\,\omega_3 - 150\,\omega_3$,

$7000 = 400\,\omega_3$,

$\omega_3 = \frac{7000}{400} = 17{,}5\%$

Ответ. 17,5%.

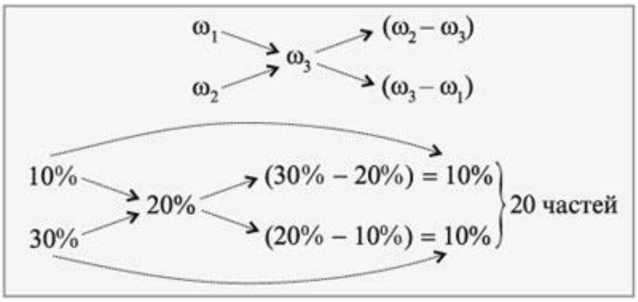
Теперь решим задачу посложнее.

Задача 28. Определите, сколько нужно взять 10%-го раствора соли и 30%-го раствора этой же соли для приготовления 500 г 20%-го раствора.

Дано: $\omega_1 = 10\%$, $\omega_2 = 30\%$, $\omega_3 = 20\%$, $m_3 = 500$ г.

Найти: m_1, m_2.

Решение. Используем правило креста.



Для приготовления 500 г 20%-го раствора соли нужно взять по 10 частей растворов исходных концентраций.

Проверим правильность нашего решения, учитывая, что 1 часть равна

$$\frac{500}{10+10} = 25 \text{ г.}$$

1).250 г 10% раствора – x г соли,
100 г 10% раствора – 10 г соли,
$x = \frac{250 \cdot 10}{100} = 25$г.

2). 250 г 30% раствора – y г соли,
100 г 30% раствора – 30 г соли,
$y = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$г.

$$m(\text{раствора}) = 250 + 250 = 500 \text{ г.}$$
$$m(\text{соли}) = 25 + 75 = 100 \text{ г.}$$

Отсюда находим ω_3: 500 г раствора – 100 г соли,
100 г раствора – ω_3 г соли,

$$\omega_3 = \frac{100 \cdot 100}{500} = 20$$

Ответ. $m_1 = 250$ г, $m_2 = 250$ г.

4. Задачи на прогрессии.

Открытый банк заданий ЕГЭ содержит задачи на использование арифметической и геометрической прогрессии.

Основные формулы по данной теме:

Арифметическая прогрессия	***Геометрическая прогрессия***
$(a_n); a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots$	$(b_n); b_1, b_2, \ldots b_n, b_{n+1} \ldots$
$d = a_{n+1} - a_n$ **(разность)**	$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ **(знаменатель)**
$a_n = a_1 + d(n-1)$ **(формула n-го члена)**	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ **(формула n-го члена)**

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ **(сумма n первых членов)** $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{q^n-1)b_1}{q-1}$ **(сумма n первых членов)**

Задача 29. Турист идет из одного города в другой, каждый день, проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Решение. Так как пройденное расстояние изменялось на одну и ту же величину, имеет место быть арифметическая прогрессия. В первый день турист прошел 10 км, значит, $a_1 = 10$, в пути он находился 6 дней, значит, n = 6, всего он прошел 120км, значит, $S_6 = 120$. Каждый день турист проходил больше, чем в предыдущий, на d км, найдем d из формулы суммы:

$$S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_6 = \frac{2\cdot 10+d(6-1)}{2} \cdot 6$$

$$120 = \frac{20+5d}{2} \cdot 6$$

$$d = 4$$

расстояние, пройденное туристом в третий день, найдем по формуле n-го члена:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_3 = 10 + 2\cdot 4 = 18 \text{ (км)}$$

Ответ. 18

Задача 30. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

Решение. Опять арифметическая прогрессия. По условию задачи известна сумма расстояний, которые улитка проползла за первый и последний дни:

$$a_1 + a_n = 10,$$

а также все расстояние, которое она преодолела: $S_n = 150$.

Воспользуемся соответствующей формулой суммы:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$$

$$150 = \frac{10}{2} \cdot n$$

$$n = 30$$

Таким образом, улитка потратила на весь путь 30 дней.

Ответ. 30

Задача 31. Бизнесмен Коржов получил в 2000 году прибыль в размере 1 400 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 20% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей составила прибыль Коржова за 2004 год?

Решение. Каждый год прибыль увеличивалась на 20%, т. е. есть **в** 1,2 раза.

Следовательно, величины прибылей образуют ***геометрическую прогрессию***, в которой первый член $b_1 = 1400000$ и знаменатель $q = 1,2$.

За 2004 год Коржов заработал:

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 1400000 \cdot 1,2^4 = 2903040 \text{ рублей.}$$

Ответ. 2 903 040