Г. А. Мерзон, И. В. Ященко

Длина Площадь Объём

Издание третье, стереотипное

Издательство МЦНМО
Москва, 2015

УДК 51(07)
ББК 22.1

Мерзон Г. А., Ященко И. В.

М52 Длина, площадь, объём.— 3-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2015.— 48 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0335-4

Шестая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена различным подходам к сравнению и вычислению площадей и объёмов и предназначена для занятий со школьниками 6–11 классов. В неё вошли разработки четырёх занятий математического кружка, в каждом из которых подробно разобраны задачи различной сложности и даны методические указания для учителя. Приведён также список дополнительных задач. В приложении имеются различные варианты раздаточного материала. Брошюра адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям математики.

Первое издание книги вышло в 2011 г.

Григорий Александрович Мерзон, Иван Валериевич Ященко

Длина, площадь, объём

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Художник *Н. С. Корчагина* Технический редактор *Е. С. Горская*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 6.10.2014 г.
Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 3 печ. л.
Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп»
105187, Москва, Борисовская ул., д. 14.

ISBN 978-5-4439-0335-4

Предисловие

Брошюра посвящена ряду вопросов, связанных с вычислениями площадей и объёмов.

Основной текст брошюры состоит из четырёх занятий.

Чувство размерности — понимание того, как меняются те или иные числовые характеристики (объёмы и площади фигур и т. п.) при пропорциональном изменении размеров, — желательно начать развивать до того, как ребенок научится вычислять их по известным заранее формулам, не задумываясь о сути происходящего. Эту задачу и старается решить первая часть брошюры: в *первом занятии* обсуждается, как изменяются площади и объёмы при масштабировании, во *втором* — то, как изменяется при масштабировании площадь поверхности, и вообще эффекты сочетания разных размерностей в одной задаче. Эти занятия рассчитаны на школьников 6–8 классов.

Соображений размерности достаточно, чтобы понять, как зависит, например, объём шара от его радиуса. Но для точного вычисления этого объёма таких соображений недостаточно. Помогает здесь идея послойного рассмотрения объёмной картинки — а точнее, *принцип Кавальери*. В *третьем занятии* мы знакомимся с принципом Кавальери для фигур, составленных из кубиков, когда он особенно нагляден. Вычисление объёмов таких фигур позволяет нам найти геометрически суммы $1+\ldots+n$ и $1+\ldots+n^2$. Это занятие (исключая самый конец) предназначено для школьников с 7 класса.

В *четвёртом занятии* при помощи принципа Кавальери вычисляются объёмы конуса и шара. В конце занятия приводятся вычисления площадей круга и сферы. Это занятие рассчитано на школьников начиная с 8–9 класса, но может быть использовано и в 10–11 классе как дополнительный материал к курсу стереометрии.

Мы подходим к площадям и объёмам неформально, но на определённом этапе полезно познакомиться и с аксиоматическим определением площади. Оно приводится в *приложении A*.

Различные варианты заданий кружка (вместе с дополнительными задачами — среди которых есть как задачи на повторение, так и задачи повышенной сложности) приведены в *приложении B*.

Авторы благодарны А. В. Шаповалову, взявшему на себя труд по рецензированию брошюры и не только указавшему авторам на ряд неудачных мест, но и предложившему для неё несколько задач, а также М. А. Берштейну, А. Д. Блинкову и Т. И. Голенищевой-Кутузовой за полезные обсуждения. Авторы будут признательны читателям за сообщения об ошибках и опечатках (e-mail: merzon@mccme.ru, Григорий Мерзон).

Занятие 1

Масштаб и объём

Знакомство с понятием размерности стоит начать с «клетчатого» варианта, в котором любое соображение можно проверить прямым подсчётом.

Начать можно со следующей известной задачи, которую часто решают неправильно.

Задача 1.1. После семи стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько ещё стирок хватит оставшегося куска? (На каждую стирку уходит одно и то же количество мыла.)

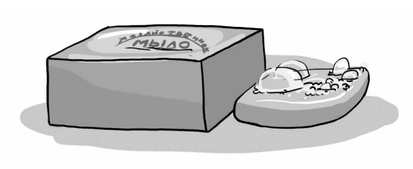


Рис. 1.1а

На этот вопрос часто дают ответ «ещё на 7 стирок». Убедиться в его ошибочности можно, задумавшись над следущим вопросом. Если всего куска хватает на 14 стирок, а маленького — на 7, то, наверное, из двух маленьких кусков можно сложить один большой; как же это сделать?

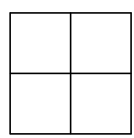


Рис. 1.1б

Если представить себе трёхмерную ситуацию не получается, полезно сначала разобраться со случаем плоского и квадратного мыла — там уже нетрудно увидеть, что большой кусок состоит из четырёх маленьких.

На самом деле, как мы увидим в следующих задачах, большой кусок мыла состоит из восьми маленьких; соответственно, на первые 7 стирок ушло 7 маленьких кусков, значит и одного оставшегося маленького куска хватит на одну стирку.

Если занятие начинается с этой задачи, то совершенно не обязательно сразу подробно её разбирать. Надо только объяснить, что с наивным рассуждением имеется какая-то проблема.

Задача 1.2. Квадрат со стороной а) 3 см; б) 1 м разрезали на квадраты со стороной 1 см. Сколько квадратиков получилось? Куб со стороной в) 3 см; г) 1 м разрезали на кубики со стороной 1 см. Сколько кубиков получилось?

Посчитать что-нибудь непосредственно на объёмной картинке всегда непросто. Обычно приходится так или иначе сводить всё к плоской задаче. Один из способов сделать это — рассмотреть картинку послойно («по этажам»).

Решение. в) Куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из трёх одинаковых слоёв. Каждый из этих слоёв представляет собой квадрат размером 3×3, который, как мы уже выяснили в предыдущей задаче, состоит из $3 \cdot 3 = 9$ клеток. Значит, всего кубиков $3 \cdot 9 = 27$.

г) Аналогичным образом находим, что куб со стороной 1 м состоит из $100^3 = 1\,000\,000$ сантиметровых кубиков (собственно, это рассуждение и объясняет, почему в одном кубическом метре не сто кубических сантиметров, а целый миллион).

Вообще, разрезая метровый, например, куб на достаточно маленькие кубики, можно сложить сколь угодно высокую башню (ср. также с задачей 2.11).

Задача 1.3. Грузчик на складе может поднять упаковку размером $3 \times 3 \times 3$ литровых пакетов молока. Смогут ли три грузчика поднять упаковку $9 \times 9 \times 9$ пакетов?

Решение. Даже если просто подсчитать вес большой упаковки: $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ пакетов, то есть примерно 729 кг, станет ясно, что втроем её не поднять.

В любом случае, стоит разобраться, из скольких же маленьких упаковок состоит большая. Но нетрудно заметить, что эту задачу мы фактически уже решали выше (с кубиками вместо пакетов молока), и ответ — большая упаковка тяжелее маленькой в 27 раз.

Задача 1.4. Детский надувной бассейн имеет высоту 30 см, а его дно представляет собой квадрат со стороной 1 м. Сколько весит такой бассейн с водой?

Решение. Вспомним, что 1 литр, то есть кубический дециметр, воды весит 1 кг. Поэтому вес бассейна с водой в кг равен его объёму в дм^3. Соответственно, объём нашего бассейна — $3 \cdot 10^2 = 300$ дм^3, а вес — 300 кг.

Задача 1.5. Саша и Юра построили по башне из кубиков (см. рис. 1.5). Обе башни имеют квадратное основание и составлены из одинакового числа кубиков.

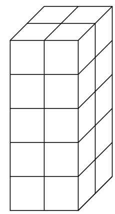


Рис. 1.5

а) Сторона основания Юриной башни в четыре раза больше, чем Сашиной. Во сколько раз Сашина башня выше?

б) Сашина башня в четыре раза выше, чем Юрина. Во сколько раз у Юриной башни больше сторона основания?

Ответ: а) в 16 раз; б) в 2 раза.

Центральный вопрос занятия — как изменяются объёмы и площади фигур произвольной формы при изменении линейных размеров в k раз (в самом простом виде этот вопрос уже встречался нам в задаче 1.3).

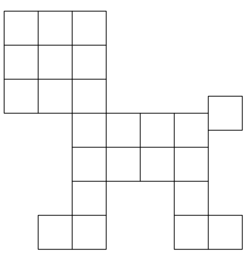


Рис. 1.6а

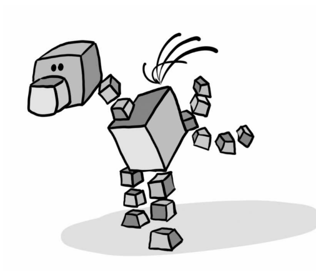


Рис. 1.6б

Задача 1.6. а) Саша сложил картинку из квадратиков со стороной 2 см (см. рис. 1.6а), а Юра — аналогичную картинку из квадратиков со стороной 4 см. Во сколько раз площадь Сашиной картинки меньше площади Юриной картинки?

б) Кубарик сложен из нескольких деревянных кубиков (см. рис. 1.6б). Как изменится его масса, если размеры каждого кубика увеличить в 2 раза?

Стоит также выяснить, какой будет ответ, если изменять размеры не в 2, а в k раз. Отметим, что он совершенно не зависит от формы фигуры. Отсюда можно сделать вывод, что тот же ответ имеет и следующая задача.

Задача 1.7. Как изменится масса слона, если увеличить его (по всем размерам) в 2 раза? (Считать, что слон имеет форму параллелепипеда, конечно, нельзя.) Как изменится площадь слона на фотографии?

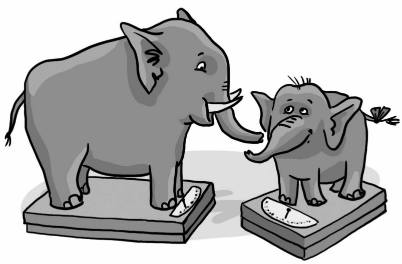


Рис. 1.7а

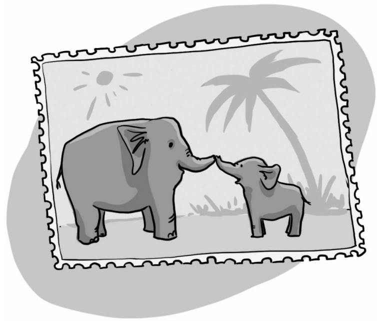


Рис. 1.7б

Ответ: в 8 раз; в 4 раза.

Решение. Чтобы связать задачу с предыдущей, можно сначала представить себе, что слон «пиксельный» — сложен из небольших кубиков. Теперь, когда кубики становятся совсем маленькими, пиксельный слон становится неотличим от настоящего...

Никакого формального доказательства в этой задаче, конечно, не требуется, достаточно понять, каков ответ.

На самом деле, с ростом размера слона его объём — а значит, и масса — будет расти как куб линейных размеров. А площадь поперечного сечения ноги — а значит, и прочность костей — только как квадрат линейных размеров. То есть при увеличении размера масса слона будет расти существенно быстрее прочности ног, и увеличенный слон не сможет стоять на ногах.

Тот же эффект можно увидеть и на простой дискретной модели: если складывать из кубиков большой куб, то нагрузка на отдельный кубик будет расти пропорционально размерам большого куба — просто из-за того, что будет расти башенка кубиков над ним. Поэтому в какой-то момент куб рухнет под собственным весом.

Если известно, как меняются площади и объёмы при масштабировании, то нетрудно понять, как (качественно) должны выглядеть разные формулы для площадей и объёмов.

Задача 1.8. а) Обозначим площадь круга радиуса 1 через V_2. Чему равна площадь круга радиуса R?

б) Обозначим объём шара радиуса 1 через V_3. Чему равен объём шара радиуса R?

Ответ: а) V_2R^2; б) V_3R^3.

Вычисление констант V_2 и V_3 — вопрос существенно более тонкий. Можно показать (см. занятие 4), что $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi$.

Дополнительные задачи

Задача 1.9. Какая из кастрюль вместительнее — левая, более широкая, или правая, втрое более высокая, но вдвое более узкая?

Ответ: левая (в $1\frac{1}{3}$ раза).

Рис. 1.9

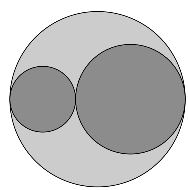


Рис. 1.10

Задача 1.10. На левую чашу весов положили два шара радиусов 3 и 5, а на правую — один шар радиуса 8. Какая из чаш перевесит? (Все шары изготовлены целиком из одного и того же материала.)

Типичный ответ на такой вопрос — это, конечно, «никакая, потому что $3+5=8$».

Решение. Такой ответ можно опровергнуть совершенно наглядным геометрическим рассуждением: заметим, что два маленьких шарика, если их поставить рядом, влезут внутрь большого; значит, их суммарный объём меньше.

Задача 1.11*. На левую чашу весов положили две круглых монеты, а на правую — ещё одну, так что весы оказались в равновесии. А какая из чаш перевесит, если каждую из монет заменить шаром того же радиуса? (Все шары и монеты изготовлены целиком из одного и того же материала, все монеты имеют одинаковую толщину.)[1]

Решение. Обозначим радиусы монет через R_1, R_2 и R_3. Так как в начале весы были в равновесии, $V_2R_1^2 + V_2R_2^2 = V_2R_3^2$, то есть $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$. Аналогично, чтобы определить, что произошло с весами, после того как монеты заменили шарами, нужно сравнить $R_1^3 + R_2^3$ с R_3^3. Но по сравнению с равенством выше, правая часть умножилась на больший радиус R_3, а два слагаемых в левой части — на меньшие радиусы R_1 и R_2:

$$R_1^3 + R_2^3 = R_1^2 \cdot R_1 + R_2^2 \cdot R_2 < R_1^2 \cdot R_3 + R_2^2 \cdot R_3 = (R_1^2 + R_2^2) \cdot R_3 = R_3^3.$$

Значит, правая чаша перевесит.

[1] Автор этой задачи — Г. Гальперин; она предлагалась на Турнире Ломоносова 2009 года.

Занятие 2

Площадь поверхности

Задача 2.1. Чему равна площадь поверхности у куба со стороной а) 10 см; б) 12 см?

Ответ: а) $6 \cdot 10^2 = 600$ (см^2); б) $6 \cdot 12^2 = 864$ (см^2).

В задаче 5 предыдущего занятия мы уже видели, что, разрезав любой куб на достаточно маленькие кубики, можно сложить из них сколь угодно высокую башню. Можно задаться вопросом, а велика ли площадь поверхности получившейся башни. Кажется, что башня узкая и площадь поверхности должна получиться небольшой. Проверим это.

Задача 2.2. Куб со стороной 1 м разрезали на кубики со стороной 1 см и сложили из них башенку с основанием в один кубик. Какова площадь поверхности получившейся башенки? Больше или меньше она площади поверхности исходного куба? Во сколько раз?

Ответ: $100^3 \cdot 4 + 2$ см$^2 \approx 400$ м^2; это примерно в $\frac{400}{6} \approx 67$ раз больше, чем площадь поверхности исходного куба.

Задача 2.3. Куб с ребром 12, сложенный из кубиков с ребром 1, облили белой краской. У скольких из маленьких кубиков оказалась покрашено 0 граней; 1 грань; 2 грани; 3 грани?

Решение. Кубики без покрашенных граней образуют куб размером $10 \times 10 \times 10$ — он состоит, как мы уже знаем, из $10^3 =$ $= 1000$ кубиков. Кубики с тремя покрашенными гранями — это угловые кубики, их столько же, сколько вершин куба — 8. Все кубики с одной покрашенной гранью лежат внутри граней куба и всего их $6 \cdot 10^2 = 600$ (ср. задачей 2.1а). Наконец, кубики с двумя покрашенными гранями — это все кубики на рёбрах, кроме вершин, их $12 \cdot 10 = 120$.

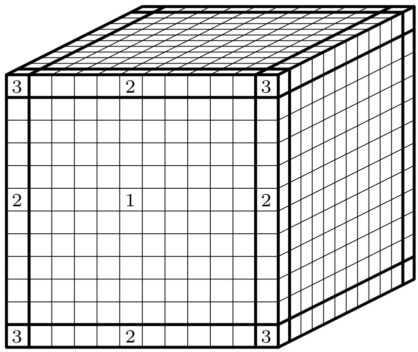


Рис. 2.3

Если сложить все эти числа, то возникает тождество $12^3 = 10^3 + 6 \times \times 10^2 + 12 \cdot 10 + 8$, — и вообще, если увеличить ребро куба с a до $a + b$, то аналогичным подсчетом можно доказать известную формулу $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, представляющую собой частный случай *бинома Ньютона*. Можно аналогичными рассуждениями доказать и общий бином Ньютона.

Задача 2.4. а) Какую долю площади квадрата размером 12×12 составляют приграничные клетки?

б) Какую долю объёма куба размером $12 \times 12 \times 12$ составляют приграничные кубики?

Ответ: а) 31%; б) 42%.

Решение. б) На первый взгляд, достаточно повторить решение задачи 2.1а): у куба 6 граней, к каждой из которых прилегает по $12 \cdot 12 = 144$ кубика; значит, всего должно быть $6 \cdot 144 = 864$ кубика.

Но такое вычисление даёт неверный ответ из-за того, что некоторые кубики прилегают более чем к одной грани — и, соответственно, были посчитаны несколько раз. Нетрудно, впрочем, исправить это вычисление, воспользовавшись подсчётом из предыдущей задачи: нас интересуют кубики, у которых покрашена хотя бы одна грань; всего их $600+120+8=728$, они составляют $728/1728 \approx 42\%$.

Можно решить задачу и проще, если подумать не про количество граничных, а про количество внутренних кубиков — их будет 10^3 штук или $\frac{10^3}{12^3} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 58\%$. Соответственно, граничных кубиков будет $100\% - 58\% \approx 42\%$.

Отметим (особенно хорошо это видно, если добавить ещё ответ «17%» на аналогичный вопрос про отрезок длины 12, сложенный из отрезков длины 1), что доля граничных кубиков быстро растёт с увеличением размерности. Чуть позже мы увидим тот же эффект и в непрерывной ситуации.

Задача 2.5. На рынке продаётся два вида арбузов одинакового диаметра. Первый — по 100 рублей, зато с очень тонкой коркой, а второй по 70 рублей, но 20% его радиуса занимает корка (которую придётся выкинуть). Какие арбузы выгоднее покупать?

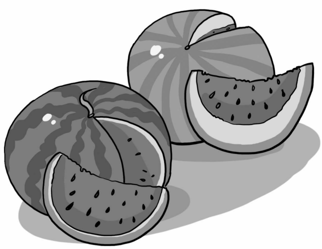


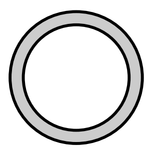
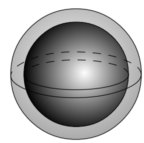
Рис. 2.5

Можно, обменявшись неформальными аргументами, провести на занятии голосование: кто какой арбуз предпочтёт купить. Мнения разделятся, но скорее всего, большинство будет за покупку арбуза за 70 руб, аргументируя это тем, что мякоти, вроде, на 20% меньше, а цена меньше на 30%.

Решение. Для решения этой задачи не обязательно знать точную формулу для объёма шара, достаточно понимания того, как объём меняется при изменении линейных размеров (см. задачи 1.7 и 1.8). *Радиус* мякоти арбуза второго вида составляет

0,8 от радиуса мякоти арбуза первого вида. Но чтобы узнать, во сколько раз меньше будет её объём, нужно 0,8 возвести в куб: $0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0, 8 = 0{,}64 \cdot 0{,}8 = 0{,}512$ — то есть *почти половину* второго арбуза занимает корка! Так что покупать надо, конечно, первый арбуз.

Поучительно сравнить, как меняется в такой задаче доля объёма корки, занимающей 20% по радиусу, в зависимости от размерности «арбуза». Из таблицы хорошо видно, что доля корки довольно быстро растёт с увеличением размерности.

размерность	доля корки	рисунок
1	$1 - 0{,}8 \;\; = 0{,}2$	
2	$1 - 0{,}8^2 = 0{,}36$	
3	$1 - 0{,}8^3 \approx 0{,}49$	
4	$1 - 0{,}8^4 \approx 0{,}59$	—

Задача 2.6. Ширина плоского медного кольца при нагревании увеличилась в 1,5 раза. Как изменилась площадь дырки?

Ответ: увеличилась в $1{,}5^2 = 2{,}25$ раза.

Задача 2.7. Длина экватора глобуса равна 1 м. а) Каков масштаб глобуса? б) Какую площадь на нём имеет Россия? (Длина земного экватора равна 40 000 км; площадь России — примерно 17 000 000 км^2.)

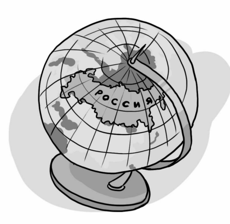


Рис. 2.7

Ответ: а) 1 : 40 000 000; б) примерно 106 см^2.

Здесь важно понимать, что при растяжении в k раз площади любых фигур, не обязательно плоских, меняются в k^2 раз.

Задача 2.8. Земной шар стянули обручем по экватору. Затем обруч удлинили на 1 м (так, что образовавшийся зазор везде одинаков). Пролезет ли под обручем кошка?

Ответ: как ни удивительно, пролезет (получается зазор около 16 см).

Чтобы разобраться в этой задаче, полезно сначала решить её дискретный вариант.

Рис. 2.8

Задача 2.9. На кубик размером а) $3 \times 3 \times 3$; б) $100 \times 100 \times 100$ плотно надели бумажный поясок. Зазор какой величины возникнет, если удлинить поясок на 8 (поясок при этом остаётся квадратным)?

Решение. Проще разобраться в обратной задаче: как меняется длина пояска при увеличении зазора. Если увеличить «радиус» пояска на 1, то каждая из его сторон увеличится на 2, то есть длина увеличится как раз на $4 \cdot 2 = 8$. Значит, и наоборот, если увеличить длину пояска на 8, возникнет зазор в 1.

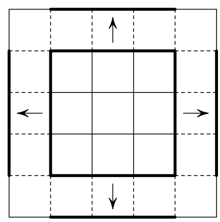


Рис. 2.9

Теперь можно решить и предыдущую задачу. Снова начнём с обратной задачи: пусть *радиус* обруча увеличили с R до $R + \delta$; как изменится его длина? Нетрудно видеть, что она увеличится на $2\pi(R + \delta) - 2\pi R = 2\pi\delta$. Значит, при увеличении *длины* обруча на 1 м возникает зазор в $\delta = \dfrac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$ м.

Отметим, что в обеих задачах ответ совершенно не зависит от исходных размеров (кубика или земного шара). Это проявление *линейности* задачи. (Ср. с задачей 2.10.)

Дополнительные задачи

Задача 2.10. Воздушный шарик (в форме идеального шара) надули так, что его площадь увеличилась на 9%. Как изменился его радиус?

Ответ: увеличился в $\sqrt{1{,}09} \approx 1{,}044$ раз, то есть примерно на 4%.

Отметим, что в отличие от задачи 2.8, то, на сколько сантиметров увеличился радиус, нельзя определить лишь по тому, на сколько квадратных сантиметров увеличилась площадь.

Задача 2.11. Можно ли вырезать из квадрата со стороной 10 см несколько кружков и приставить их друг к другу так, чтобы получилась цепочка длиной больше километра?

Решая эту задачу, часто сначала стараются вырезать самый большой круг — то есть круг, вписанный в наш квадрат.

Но после этого возникают трудности: конечно, можно вырезать из образовавшихся уголков четыре кружка — только они будут совсем маленькими (какой у них диаметр?) — и дальше вырезать максимально возможные (пусть и быстро уменьшающиеся) кружки. В этот момент иногда произносят такие слова: «Так как кружки вырезать можно сколь угодно долго, то и сумма их диаметров может стать сколь угодно большой». Однако достаточно вспомнить про бесконечно убывающую геометрическую прогрессию (например, представить шаги, каждый из которых вдвое меньше предыдущего), чтобы убедиться, что такого соображения для решения задачи недостаточно.

Решение. Сначала, разделив стороны исходного квадрата размером 10×10 см пополам, разделим исходный квадрат на четыре квадрата с вдвое меньшей стороной 5 см, и вырежем по кругу из каждого из них. Получится 4 круга, каждый диаметром в 5 см, то есть сумма диаметров — 20 см — увеличилась в два раза. А что будет, если делить сторону на 3 части? Конечно же, 9 квадратиков, каждый со стороной $\frac{10}{3}$ см. А сумма диаметров вписанных в них кружков — $9 \cdot \frac{10}{3} = 30$ см. Аналогично, разделив стороны на 10 частей, мы получим 100 кружков диаметром 1 см, то есть сумма диаметров будет равна как раз одному метру. И вообще, если делить стороны на n частей, то получится n^2

квадратиков со стороной $\frac{10}{n}$, и сумма диаметров вписанных в них кружков равна $n^2 \cdot \frac{10}{n} = 10n$, — увеличивая n, можно сделать её сколь угодно большой.

части	число квадратиков	диаметр круга	сумма диаметров
1	1	10 см	10 см
2	4	5 см	20 см
3	9	$\frac{10}{3}$ см	30 см
10	100	1 см	100 см
10000	10^8	0,01 мм	1 км
n	n^2	$\frac{10}{n}$ см	$10n$ см

Суть решения состоит в том, что при разрезании квадрата на мелкие квадратики сторона каждого из них убывает линейно, а количество квадратиков растёт квадратично. Соответственно, сумма диаметров вписанных в них кружков будет линейно расти с ростом их числа. Поэтому, увеличивая n, можно добиться того, чтобы эта сумма стала больше любого наперёд заданного числа.

При этом для выполнения условия задачи (цепочка длиной не меньше 1 км) число частей будет $n = 10^4$ и придется разрезать исходный квадрат на 10^8 маленьких квадратов со стороной 10^{-3} см, что, конечно, тяжело осуществить практически.

Занятие 3

Площади и суммы

Как мы уже видели в задаче 1.2, фигуры бывает полезно рассматривать послойно — это позволяет представлять объёмы и площади клетчатых фигур как некоторые суммы. Этот метод работает в обе стороны: иногда, посмотрев на сумму можно что-то понять про площадь (как, например, в задаче 3.1а), а иногда наоборот — представив сумму как площадь или объём, её получается вычислить из геометрических соображений (как в задаче 3.4 или 3.10*).

Полезно изготовить обсуждаемые в задачах занятия фигуры (например, можно склеить их из детских кубиков). С такими моделями даже задачу 3.10* можно предлагать детям любого возраста (в формулировке «Сложите из нескольких пирамидок параллелепипед (кирпич)»).

Задача 3.1. а) В какой из фигурок, изображённых на рисунках 3.1а и 3.1б, больше квадратиков? б) Найдите число этих квадратиков.

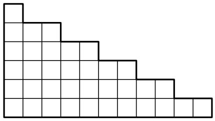


Рис. 3.1а

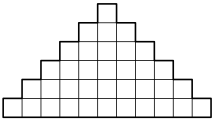


Рис. 3.1б

Ответ: а) поровну; б) 36.

Решение. а) В каждой из «строк» фигур, изображённых на рисунках, квадратиков поровну (1, 3, 5 и т. д.). Значит, и всего квадратиков поровну.

б) Можно просто просуммировать числа квадратиков по слоям: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. Но можно решить задачу и более геометрически: разрежем вторую из фигур на две части и сложим из них квадрат (см. рис. 3.1в) — получается, что фигура состоит из $6^2 = 36$ клеток.

Последнее решение даёт геометрическое доказательство того, что $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Конечно, если такое утверждение *уже сформулировано*, то его можно (и даже проще) доказать по индукции. Но геометрическое суммирование — это способ не просто доказывать, но и находить подобные формулы — см. также задачу 3.10*.

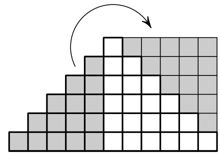


Рис. 3.1в

Задача 3.2. Треугольник лежит в прямоугольной коробке, так что одна из его сторон совпадает с дном коробки, а оставшаяся вершина лежит на противоположной стороне коробки (см. рис. 3.2а). Какую часть площади коробки занимает треугольник?

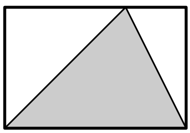


Рис. 3.2а

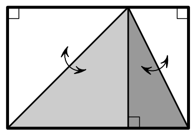


Рис. 3.2б

Ответ: половину.

Решение. Разделим мысленно коробку на две части (см. рис. 3.2б). В каждой из них ровно половина занята треугольником. Значит, и во всей коробке ровно половина площади занята треугольником.

Это рассуждение *доказывает*, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту[2]. Вообще, с этой задачи можно начинать разговор о доказательстве формул для площадей фигур (треугольника, параллелограмма, трапеции) и, при желании, об определении площади (любое вычисление площади основано на разрезании на треугольники и складывании из треугольников прямоугольников). Но основная тема нашего занятия другая.

Задача 3.3. а) Другой треугольник при укладке в коробку перекосило (см. рис. 3.3а). Занимает ли он бо́льшую, меньшую, или такую же часть площади коробки, как предыдущий треугольник? б)* Можно ли положить треугольник площади 10 в прямоугольную коробку площади 19?

[2]Для сторон, не прилегающих к тупому углу.

Ответ: а) меньшую; б) нет.

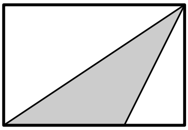


Рис. 3.3а

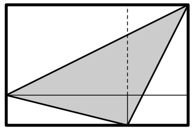


Рис. 3.3б

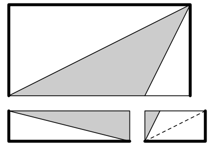


Рис. 3.3в

Решение. а) Самая длинная сторона треугольника делит коробку пополам, но сам треугольник занимает только часть одной из половин.

б)* Треугольник не может занимать больше половины площади прямоугольной коробки. Для доказательства разберём случаи расположения вершин (можно считать, что все они лежат на сторонах прямоугольника — иначе уменьшим коробку): либо на одной из сторон лежат две вершины треугольника — этот случай уже разобран в предыдущей задаче и пункте а), либо вершины треугольника лежат на трёх сторонах, а точнее, на двух сторонах и в углу (см. рис. 3.3б) — в этом случае коробку можно разбить уже на три части, в каждой из которых треугольник занимает не больше половины площади (см. рис. 3.3в).

Задача 3.4. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника составляет половину площади квадрата со стороной, равной катету. А какова площадь «пиксельного» (составленного из единичных квадратов) равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, например, 20 (см. рис. 3.4а)?

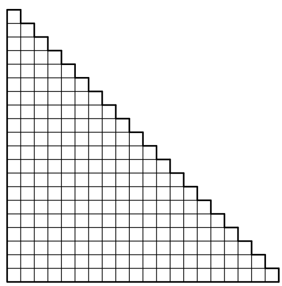


Рис. 3.4а

Ответ: $\dfrac{20 \cdot 21}{2} = 210$.

Указание. Попытаемся уложить в квадратную коробку со стороной 20 к первому пиксельному треугольнику ещё один такой же. Сколько клеток не влезет?

Решение. *Первый способ.* Из двух таких пиксельных треугольников нетрудно сложить прямоугольник размера 20×21

(см. рис. 3.4б). Соответственно, площадь треугольника в два раза меньше и равна $\frac{20 \cdot 21}{2} = 210$.

Второй способ. Посмотрим сначала повнимательнее на настоящий (не пиксельный) треугольник. Он занимает ровно половину площади коробки из-за симметрии: часть, им не занятая, в точности симметрична занятой им части.

Попытаемся провести то же рассуждение и для пиксельного треугольника. Если отразить его относительно диагонали, то исходный треугольник будет пересекаться с отражённым (см. рис. 3.4в). Но число клеток в пересечении нетрудно найти: все они лежат на диагонали квадрата и их ровно 20 штук. Получаем, что если искомая площадь равна S, то площадь квадрата равна $20^2 = 2S - 20$. То есть $S = \frac{20^2 + 20}{2} = 210$.

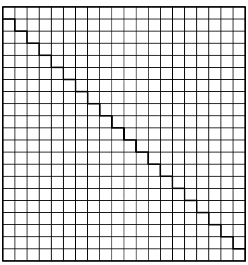


Рис. 3.4б

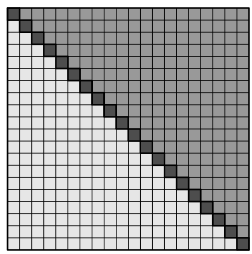


Рис. 3.4в

Второе решение выглядит, быть может, сложнее, но оно основано на более мощной идее, а потому лучше обобщается на вычисление других сумм (см., например, задачу 3.10* — до обсуждения которой второе решение можно и отложить).

Определение. Площадь пиксельного треугольника с катетом n (то есть число $1+2+3+\ldots+n$) называется n-м *треугольным числом* и обозначается T_n.

Задача 3.5. Найдите сотое треугольное число.

Указание. Его можно искать геометрически, пользуясь предыдущей задачей.

Ответ: $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$; и вообще, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ясно, что при уменьшении размера пикселя пиксельный треугольник приближается к настоящему. Поучительно проверить, что и его площадь приближается к площади настоящего треугольника.

Так можно искать и сумму произвольной арифметической прогрессии: представить её как площадь пиксельной прямоугольной трапеции и сложить из двух одинаковых трапеций прямоугольник (см. рис. 3.5).

Как видим, высота полученного прямоугольника равна высоте трапеции (то есть числу слагаемых), а ширина равна сумме длин оснований трапеции (то есть сумме первого и последнего членов).

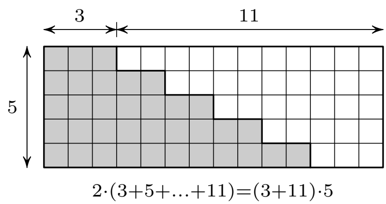


Рис. 3.5

Задача 3.6. Найдите сумму всех двузначных чисел, делящихся на 7.

Ответ: $\dfrac{(14+98)\cdot 13}{2} = 728$.

Решение. Нам нужно найти сумму $14 + 21 + \ldots + 91 + 98$. Это сумма арифметической прогрессии из $\dfrac{98-14}{7} + 1 = 13$ слагаемых, которую, как было объяснено выше, можно вычислять геометрически.

Задача 3.7. Найдите сумму двух последовательных треугольных чисел.

Указание. Из двух пиксельных треугольников размеров T_n и T_{n-1} можно сложить квадрат $n \times n$.

Ответ: $T_n + T_{n-1} = n^2$.

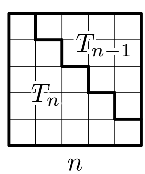


Рис. 3.7

Задача 3.8. На какую из фигур, изображённых на рисунках 3.8а и 3.8б, уйдёт больше кубиков?

Указание. Разрежьте картинку на слои. Для каждого из них воспользуйтесь задачей 3.1.

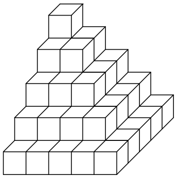


Рис. 3.8а

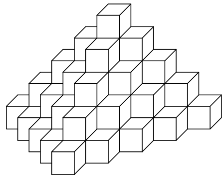


Рис. 3.8б

Задача 3.9. Какую часть кубической коробки занимает лежащая в ней (неправильная) четырёхугольная пирамида, изображённая на рис. 3.9а?

Пользоваться известной формулой для объёма пирамиды в этой задаче, конечно, нельзя (зато, как мы увидим в следующем занятии, можно отсюда эту формулу вывести).

Указание. Заполните несколькими такими пирамидами коробку до конца.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

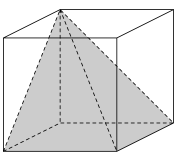


Рис. 3.9а

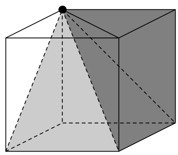


Рис. 3.9б

Решение. Из трёх таких пирамид можно сложить куб (см. рис. 3.9б). Объяснить, как это сделать, можно следующим образом: выберем одну из вершин куба и рассмотрим три грани, которые её не содержат. Построим три пирамиды с выбранной вершиной на выбранных гранях, как на основаниях. Эти пирамиды помечены различными цветами.

То же разбиение можно записать и в координатах: куб $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1$ разбивается на части $P_i = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \max(x_1, x_2, x_3) = x_i\}$. Отметим, что такое разбиение непосредственно обобщается на (гипер)куб любой размерности.

Задача 3.10*. а) В углу комнаты сложили пирамидку высоты n (см. рис. 3.8а). Сколько на неё ушло кубиков?

б) Вычислите сумму $1^2 + \ldots + n^2$.

Указание. Попытайтесь сложить из нескольких таких пирамидок фигуру, объём которой уже известен (вдохновляться можно задачей 3.4).

Ответ: $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение. Один из способов решить эту задачу — сложить из шести пирамидок из прошлой задачи параллелепипед размером $n \times (n+1) \times (2n+1)$ — в духе первого решения задачи 3.4 (на рисунке 3.10а последовательно показаны три этапа складывания половины такого параллелепипеда из трех пирамидок; см. также [5]). Недостаток такого подхода состоит в том, что из-за наличия у пирамидок «зубцов» уже здесь возникает довольно сложная картинка; а уж удастся ли таким способом найти сумму хотя бы третьих степеней — неясно.

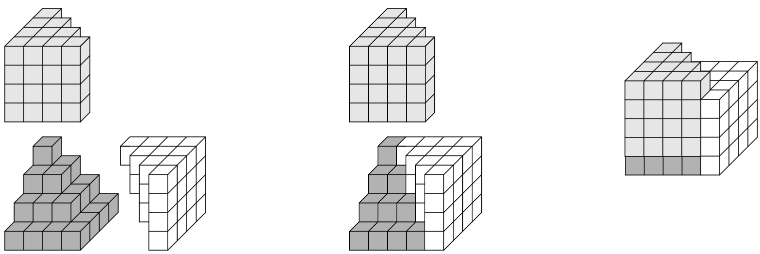


Рис. 3.10а

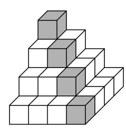


Рис. 3.10б

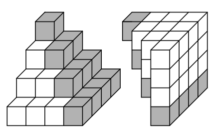


Рис. 3.10в

Более правильный метод заключается в том, чтобы, сохраняя необходимое — разбиение куба на три одинаковые части, — отбросить несущественное: не будем настаивать на том, чтобы части не пересекались. Вместо этого разобьём куб на три *пересекающиеся* пирамидки, а потом учтём их пересечение (в духе второго решения задачи 3.4).

Итак, куб размером $n \times n \times n$ разбивается на три пирамидки. Пересечение всех пирамидок состоит из диагонали (см. рис. 3.10б) —

то есть в нём ровно n кубиков. Попарные пересечения пирамидок представляют собой пиксельные треугольники (см. рис. 3.10в) — то есть в них по $1 + \ldots + n$ кубиков.

Осталось применить формулу включения–исключения: обозначим $1^k + \ldots + n^k$ через $S_k(n)$, тогда $n^3 = 3S_2(n) - 3S_1(n) + n$; вспоминая, что $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, находим $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Дополнительные задачи

Задача 3.11*. Докажите «теорему сложения треугольных чисел»: $T_{n+m} = T_n + T_m + nm$.

Указание. Сложите равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом $n + m$ из двух треугольников с катетами n и m и прямоугольника из nm клеток (см. рис. 3.11).

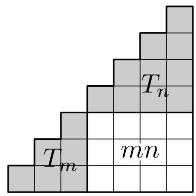


Рис. 3.11в

Задача 3.12*. Попытайтесь, действуя в духе последнего решения задачи 3.10*, найти последовательно суммы третьих, четвёртых степеней.

Ответ: $S_3(n) = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Геометрическое доказательство того, что $S_3(n) = S_1(n)^2$, можно найти в статье [1].

Отметим, что $S_4(n)$ уже не раскладывается на линейные множители. Так что найти эту сумму «складывая (гипер)параллелепипед из (гипер)пирамидок», вероятно, нельзя.

Задача 3.13*. Найдите n-е *пирамидальное число* — сумму $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ последовательных треугольных чисел.

Указание. Сложите параллелепипед из пирамидок типа тех, что фигурируют в задаче 4.1.

Ответ: $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Занятие 4

Принцип Кавальери

Задача 4.1. На какую из пирамидок, изображённых на рисунках, уйдёт больше кубиков?

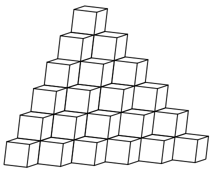


Рис. 4.1а

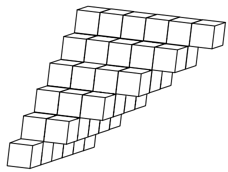


Рис. 4.1б

Решение. Посмотрим на вертикальные слои. Каждый из них представляет собой «треугольник» из кубиков и соответствующие слои в пирамидах совпадают (с точностью до сдвига). Значит, на каждую из пирамидок уйдёт одно и то же число кубиков.

Решение этой задачи основывается на игравшей ключевую роль в предыдущем занятии идее послойного рассмотрения объёмной картинки. Оставшаяся часть занятия посвящена применению той же идеи, но уже не в дискретной, а в непрерывной ситуации.

Задача 4.2*. Докажите, что $T_1+T_2+\ldots+T_n = n\cdot 1+(n-1)\times$ $\times\, 2+(n-2)\cdot 3+\ldots+1\cdot n$.

Указание. Воспользуйтесь разрезанием на горизонтальные слои картинок из предыдущей задачи.

Пусть в пространстве имеются два тела, и пусть проведены все плоскости, параллельные данной. *Принцип Кавальери* утверждает, что если для каждой из плоскостей площадь сечения первого тела равна площади сечения второго тела, то объёмы тел равны.

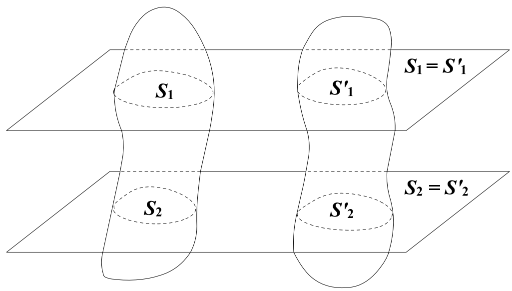


Рис. 4.2

Можно это утверждение обобщить: если соответствующие площади сечений двух фигур отличаются в k раз, то и объёмы тел отличаются в k раз.

Задача 4.3. Сформулируйте аналог принципа Кавальери для плоских фигур.

Решение. Пусть на плоскости имеются две фигуры, и пусть проведены все прямые, параллельные данной. Тогда если каждая из прямых пересекает фигуры по равным отрезкам, то площади фигур равны (см. рис. 4.3).

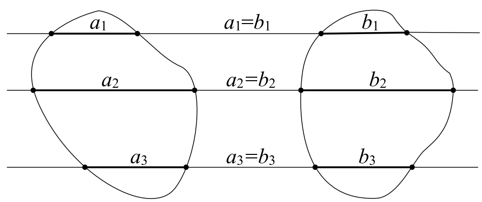


Рис. 4.3

Задача 4.4. Докажите принцип Кавальери а) для трапеций, основания которых параллельны направлению сечений; б) для выпуклых многоугольников на плоскости.

Решение. а) Это утверждение непосредственно следует из формулы для площади трапеции.

б) Пусть соответствующие сечения многоугольников M и N прямыми, параллельными прямой l, равны. Проведём прямые, параллельные l через каждую из вершин M и N (см. рис. 4.4). Тогда каждый из этих многоугольников распадётся на трапеции (в обобщённом смысле: часть этих трапеций может оказаться параллелограммами или даже треугольниками). Площади соответствующих трапеций равны по предыдущему пункту. Значит, равны и площади многоугольников.

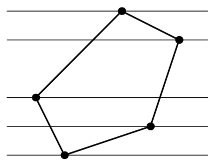


Рис. 4.4

Аналогичные рассуждения показывают, что если длины соответствующих сечений двух многоугольников прямыми, параллельными данной, отличаются в k раз, то и площади этих многоугольников отличаются в k раз.

Задача 4.5. Объёмную фигуру растянули в k раз в одном из направлений. Как изменился её объём?

Ответ: увеличился в k раз.

При желании, этот факт можно не выводить из принципа Кавальери, а считать очевидным.

Решение. Формально вывести этот ответ из принципа Кавальери можно следующим образом. Выберем какую-нибудь плоскость α, параллельную нашему направлению. Тогда сечения старой и новой фигур, параллельные α, отличаются растяжением в k раз. Значит, и их площади отличаются в k раз (см. комментарий к предыдущей задаче). Значит, и объёмы старой и новой фигуры отличаются в k раз.

Отсюда можно вывести и принятый нами ранее на веру ответ в задаче 1.7: чтобы увеличить слона в k раз по всем размерам, можно сделать растяжение последовательно по каждой из трех осей координат; при каждом из них объём увеличивается в k раз, значит, всего объём увеличится в k^3 раз.

Определение. *Конусом* в этом занятии называется тело, состоящее из плоской фигуры («основания конуса») вместе со всеми отрезками, соединяющими её с некоторой точкой («вершиной конуса») вне плоскости основания.

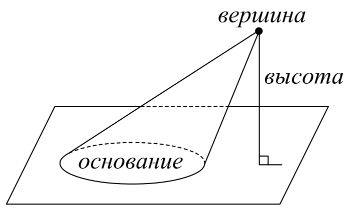


Рис. 4.5а

Например, обычный («прямой круговой») конус — это конус над кругом (с вершиной, лежащей над центром круга), его поверхность — это конус над окружностью, а пирамида — это то же самое, что конус над многоугольником.

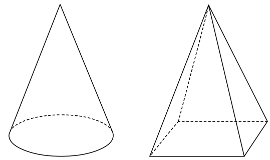


Рис. 4.5б

Задача 4.6. Пусть площадь основания конуса равна S, а его высота равна h. Найдите площадь сечения этого конуса параллельной основанию плоскостью, проходящей на расстоянии x от вершины.

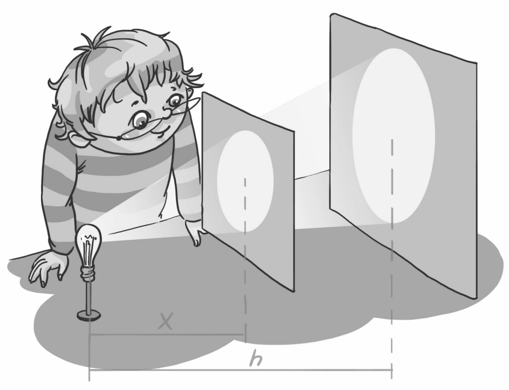


Рис. 4.6

Решение. Заметим, что это сечение представляет собой основание, уменьшенное в $\dfrac{h}{x}$ раз. Поэтому искомая площадь равна $\left(\dfrac{x}{h}\right)^2 S$.

Задача 4.7. Докажите, что объём конуса зависит только от его высоты и площади основания (и не зависит от формы основания).

Задача 4.8. а) Пусть объём конуса с площадью основания 1 и высотой 1 равен c. Чему равен объём конуса с площадью основания S и высотой h? б) Чему равно c?

Указание. б) Удобно взять в качестве конуса пирамиду с квадратным основанием.

Ответ: а) chS; б) $c = \frac{1}{3}$. Таким образом, объём конуса есть $\frac{1}{3}hS$.

Решение. б) См. задачу 3.9.

Задача 4.9. Найдите площадь сечения шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра (см. рис. 4.9).

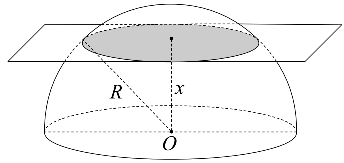


Рис. 4.9

Ответ: $\pi(R^2 - x^2)$.

Задача 4.10. Найдите объём шара радиуса R.

Указание. Пользуясь принципом Кавальери, представьте этот объём как разность объёмов двух тел.

Решение. Рассмотрим полушарие (см. рис. 4.10). Как видно из предыдущей задачи, площадь любого его сечения является разностью двух площадей: πR^2 и πx^2 — то есть площадей соответствующих сечений цилиндра и конуса. Но тогда (по принципу Кавальери) и объём полушария есть разность объёма цилиндра (с радиусом основания R и высотой R) и конуса (с такими же основанием и высотой). Таким образом, объём шара радиуса R есть $2(\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

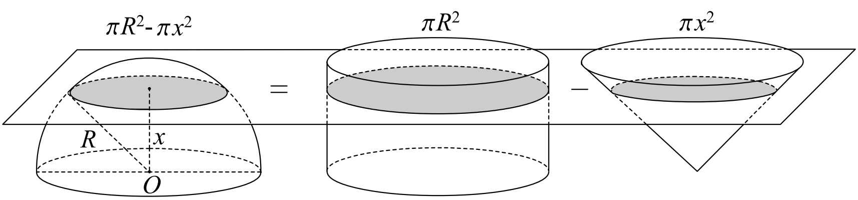


Рис. 4.10

Это вычисление объёма шара принадлежит Архимеду. Сейчас объём шара обычно вычисляют при помощи интегрирования — впрочем, по сути вычисление получается то же самое.

Задача 4.11. а) На клетчатой бумаге нарисован многоугольник M с вершинами в узлах сетки, стороны которого не идут по линиям сетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки внутри M равна сумме длин горизонтальных отрезков сетки внутри M.

б) Как обобщить утверждение на многоугольники, имеющие стороны, идущие по линиям сетки?

Указание. Каждая из сумм равна площади многоугольника.

Сравните с задачей 4.4.

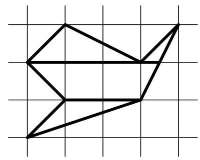


Рис. 4.11

Решение. а) Разрежем M по горизонтальным линиям сетки. Получится несколько треугольников, трапеций и, возможно, параллелограммов. Площадь каждой из этих фигур равна полусумме двух горизонтальных отрезков сетки, которые её ограничивают (если фигуру ограничивает один отрезок, то второе число считаем нулевым). Суммируя эти площади и замечая, что каждый отрезок входит в сумму ровно два раза (какую-то фигуру он ограничивает сверху, а какую-то — снизу), получаем утверждение указания.

б) Из решения предыдущего пункта видно, что стороны, идущие по линиям сетки, нужно учитывать с весом $\frac{1}{2}$. Получается следующее утверждение.

Для произвольного многоугольника на клетчатой бумаге с вершинами в узлах сетки сумма горизонтальных отрезков сетки внутри плюс половина суммы горизонтальных сторон равна сумме вертикальных отрезков сетки внутри плюс половина суммы вертикальных сторон (и равна площади многоугольника).

Формулировка из пункта б) проясняет и решение пункта а): нетрудно понять, что если утверждение из указания выполнено для двух многоугольников, не имеющих внутренних точек, то оно выполнено и для их объединения; остается заметить, что любой многоугольник можно разрезать на маленькие трапеции и треугольники (со сторонами, идущими по линиям сетки), для которых утверждение задачи очевидно.

Дополнение: площади круга и сферы

Научившись вычислять объёмы конусов и найдя объём шара, можно разобраться и в том, почему площадь круга равна πR^2, а площадь сферы $4\pi R^2$.

Сначала только необходимо разобраться, в чем же состоит вопрос: мы уже видели в задаче 1.8, что площадь круга есть (константа) $\cdot R^2$; константа эта, как нетрудно подсчитать, приблизительно равна 3,14 — так, наверное, нужно просто назвать эту константу π и дело с концом. Дело тут в том, что имеется другое определение числа π: по тем же соображениям размерности *длина* окружности есть (константа) $\cdot R$, и π определяется как половина этой константы. Если угодно, то, что эти два определения дают одно и то же число, мы и хотим доказать.

Чтобы связать длину окружности и площадь круга, будем думать о круге как о составленном из множества концентрических окружностей. Представим себе, что каждая из этих окружностей представляет собой упругую струну. Если мы теперь разрежем наш круг по радиусу (см. рис. 4.12), то каждая струна распрямится. Что же за фигура при этом получится из нашего круга?

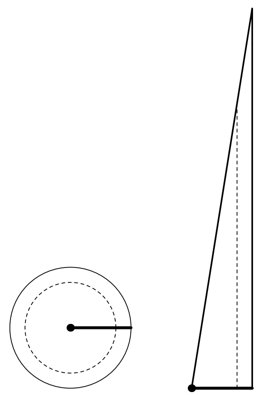


Рис. 4.12

Так как длина струны, отстоящей от центра на расстояние x, равна $2\pi x$, получится прямоугольный треугольник с катетами R и $2\pi R$. Площадь этого треугольника — а значит, и окружности радиуса R — есть $\dfrac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$, что и требовалось.

Такая редукция вычисления площади шара к вычислению площади треугольника напоминает вычисление объёма конуса в занятии выше. Можно сказать, что мы смотрим на круг как на «конус над окружностью» (и, соответственно, можно переписать это рассуждение слегка по-другому — в духе вычисления площади сферы ниже).

Заметим ещё, что теперь нетрудно найти и площадь произвольного эллипса. Действительно, эллипс с полуосями a и b представляет собой окружность, растянутую в a раз по горизонтали и в b раз по вертикали. Так как при растяжении в k раз в одном направлении площадь меняется в k раз, площадь эллипса равна πab.

Площадь сферы тоже можно найти, рассмотрев шар как конус над ней: разрежем шар на тонкие клинья с вершинами в центре (см. рис. 4.13).

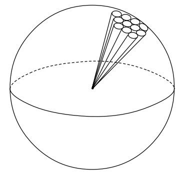


Рис. 4.13

Каждый клин можно считать конусом, поэтому их суммарный объём V — то есть объём шара — есть $\frac{1}{3}SR$, где S — сумма площадей оснований клиньев — то есть площадь сферы. Подставляя найденный в задаче 4.10 ответ, получаем $\frac{1}{3}SR = \frac{4}{3}\pi R^3$, то есть $S = 4\pi R^2$.

Можно заметить, что площадь сферы в точности равна произведению длины большой окружности на диаметр сферы. Это не случайно: можно показать, что осевая проекция сферы на (касающийся её) цилиндр сохраняет площади — факт, отлично известный в картографии (см. рис. 4.14).

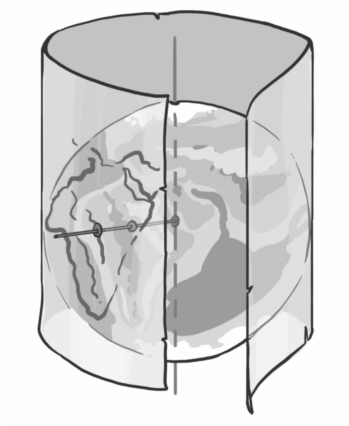


Рис. 4.14

Задача 4.12*. Докажите, что объёмы шара и описанного около него многогранника относятся так же, как площади их поверхностей.

Указание. Отношение объёма и площади поверхности и для шара и для описанного многогранника равно $\frac{R}{3}$.

Приложение A

Определение площади и объёма

Вычисление площади любой фигуры основывается на том, что её можно разрезать на части и сложить площади получившихся фигур (см., например, доказательство формулы площади треугольника в задаче 3.2). На этой идее и основывается аксиоматическое определение площади.

Площадь можно определить, как функцию S на множестве (плоских) многоугольников, обладающую следующими естественными свойствами («аксиомами площади»):

1) S сохраняется при движениях;

2) S сильно аддитивна: если у многоугольников T и T' нет общих внутренних точек, то $S(T \cup T') = S(T) + S(T')$;

3) S(прямоугольника со сторонами a, b) $= ab$.

Можно доказать (разрезая произвольный многоугольник на треугольники), что эти свойства определяют функцию S однозначно.

Если при определении площади не хочется ограничиваться многоугольниками, то стоит ещё добавить аксиому неотрицательности площади — чтобы можно было вычислять площадь, оценивая её снизу и сверху многоугольниками содержащимися внутри фигуры и содержащими её. Кроме того, необходимо выбрать класс фигур, для которого определяется площадь — дело в том, что функций с перечисленным выше свойствами, определённых на всех фигурах (множествах точек), не существует (см., например, брошюру [4]; впрочем, для фигур, ограниченных разумными кривыми, никаких проблем такого рода не возникает).

Мы видели, что для вычисления объёма нам потребовался ещё принцип Кавальери. Это находит отражение и в определении объёма.

Объём можно определить как функцию V на множестве многогранников, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1) V сохраняется при движениях;

1') V удовлетворяет принципу Кавальери;

2) если внутренности многогранников P и P' не пересекаются, то $V(P \cup P') = V(P) + V(P')$;

3) V(прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a, b, c) = abc$.

Отметим, что если для многоугольников аналог аксиомы $1'$ следует из аксиом 1 и 2, то для пространственных фигур аксиома 1' из аксиом 1–3 никак не следует. Поэтому её необходимо включить в определение — иначе, как это ни удивительно, кроме настоящего объёма определению будут удовлетворять и другие функции (возникающие из *инварианта Дена* — см., например, статью [3]).

Приложение В
Раздаточный материал

Одно занятие про размерность

Вариант попроще

Задача 0. После семи стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько ещё стирок хватит оставшегося куска? (На каждую стирку уходит одно и то же количество мыла.)

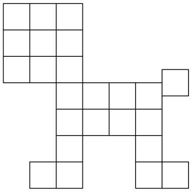
Задача 1. Грузчик на складе может поднять упаковку размером $3 \times 3 \times 3$ литровых пакетов молока. Смогут ли три грузчика поднять упаковку $9 \times 9 \times 9$ пакетов?

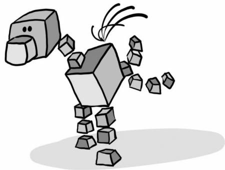
Задача 2. Детский надувной бассейн имеет высоту 30 см, а его дно представляет собой квадрат со стороной 1 м. Сколько весит такой бассейн с водой?

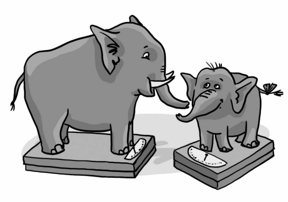
Задача 3. а) Саша сложил картинку из квадратиков со стороной 2 см (см. рис. слева), а Юра — аналогичную картинку из квадратиков со стороной 4 см. Во сколько раз площадь Сашиной картинки меньше площади Юриной картинки?

б) Кубарик сложен из нескольких деревянных кубиков (см. рис. в центре). Как изменится его масса, если размеры каждого кубика увеличить в 2 раза?

в) Как изменится масса слона, если увеличить его (по всем размерам) в 2 раза?







Задача 4. а) Какую долю площади квадрата размером 12×12 составляют приграничные клетки? б) Какую долю объёма куба размером $12 \times 12 \times 12$ составляют приграничные кубики?

Задача 5. б) На рынке продаётся два вида арбузов одинакового диаметра. Первый — по 100 рублей, зато с очень тонкой коркой, а второй по 70 рублей, но 20% его радиуса занимает корка (которую придётся выкинуть). Какие арбузы выгоднее покупать?

Задача 6. Длина экватора глобуса равна 1 м. а) Каков масштаб глобуса? б) Какую площадь на нём имеет Россия? (Длина земного экватора равна 40 000 км; площадь России — примерно 17 000 000 км^2.)

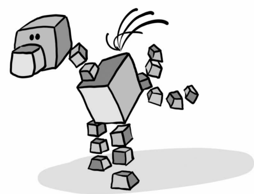
Одно занятие про размерность

Вариант посложнее

Задача 0. После семи стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько ещё стирок хватит оставшегося куска? (На каждую стирку уходит одно и то же количество мыла.)

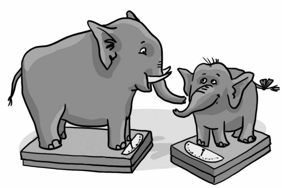
Задача 1. Грузчик на складе может поднять упаковку размером $3 \times 3 \times 3$ литровых пакетов молока. Смогут ли три грузчика поднять упаковку $9 \times 9 \times 9$ пакетов?

Задача 2. Детский надувной бассейн имеет высоту 30 см, а его дно представляет собой квадрат со стороной 1 м. Сколько весит такой бассейн с водой?



Задача 3. а) Кубарик сложен из нескольких деревянных кубиков (см. рис.). Как изменится его масса, если размеры каждого кубика увеличить в 2 раза?

б) Как изменится масса слона, если увеличить его (по всем размерам) в 2 раза?



Задача 4. а) Обозначим площадь круга радиуса 1 через V_2. Чему равна площадь круга радиуса R? б) Обозначим объём шара радиуса 1 через V_3. Чему равен объём шара радиуса R?

Задача 5. На левую чашу весов положили два шара радиусов 3 и 5, а на правую — один шар радиуса 8. Какая из чаш перевесит? (Все шары изготовлены целиком из одного и того же материала.)

Задача 6. а) Какую долю объёма куба размером $12 \times 12 \times 12$ составляют приграничные кубики?

б) На рынке продаётся два вида арбузов одинакового диаметра. Первый — по 100 рублей, зато с очень тонкой коркой, а второй по 70 рублей, но 20% его радиуса занимает корка (которую придётся выкинуть). Какие арбузы выгоднее покупать?

Задача 7. Длина экватора глобуса равна 1 м. а) Каков масштаб глобуса? б) Какую площадь на нём имеет Россия? (Длина земного экватора равна 40 000 км; площадь России — примерно 17 000 000 км^2.)

Дополнительные задачи

Задача 8. Ширина плоского медного кольца при нагревании увеличилась в 1,5 раза. Как изменилась площадь дырки?

Задача 9*. Земной шар стянули обручем по экватору. Затем обруч удлинили на 1 м (так, что образовавшийся зазор везде одинаков). Пролезет ли под обручем кошка?

Задача 10*. Воздушный шарик (в форме идеального шара) надули так, что его площадь увеличилась на 9%. Как изменился его радиус?

Задача 11*. Можно ли вырезать из квадрата со стороной 10 см несколько кружков и приставить их друг к другу так, чтобы получилась цепочка длиной больше километра?

Задача 12*. На левую чашу весов положили две круглых монеты, а на правую — ещё одну, так что весы оказались в равновесии. А какая из чаш перевесит, если каждую из монет заменить шаром того же радиуса? (Все шары и монеты изготовлены целиком из одного и того же материала, все монеты имеют одинаковую толщину.)

Два занятия про размерность

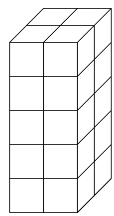
Первое занятие

Задача 0. После 7 стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько еще стирок хватит оставшегося куска? (На каждую стирку уходит одно и то же количество мыла.)

Задача 1. Квадрат со стороной а) 3 см; б) 1 м разрезали на квадраты со стороной 1 см. Сколько квадратиков получилось?
Куб со стороной в) 3 см; г) 1 м разрезали на кубики со стороной 1 см. Сколько кубиков получилось?

Задача 2. Грузчик на складе может поднять упаковку размером $3 \times 3 \times 3$ литровых пакетов молока. Смогут ли три грузчика поднять упаковку $9 \times 9 \times 9$ пакетов?

Задача 3. Детский надувной бассейн имеет высоту 30 см, а его дно представляет собой квадрат со стороной 1 м. Сколько весит такой бассейн с водой?



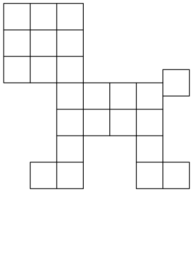
Задача 4. Саша и Юра построили по башне из кубиков. Обе башни имеют квадратное основание и составлены из одинакового числа кубиков.

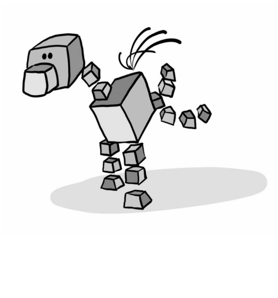
а) Сторона основания Юриной башни в четыре раза больше, чем Сашиной. Во сколько раз Сашина башня выше?

б) Сашина башня в четыре раза выше, чем Юрина. Во сколько раз у Юриной башни больше сторона основания?

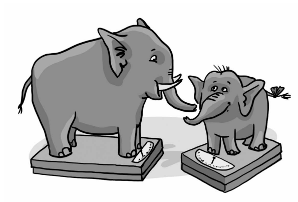
Задача 5. а) Саша сложил картинку из квадратиков со стороной 2 см (см. рис. слева), а Юра — аналогичную картинку из квадратиков со стороной 4 см. Во сколько раз площадь Сашиной картинки меньше площади Юриной картинки?

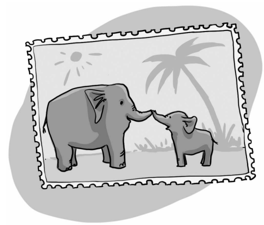
б) Кубарик сложен из нескольких деревянных кубиков (см. рис. справа). Как изменится его масса, если размеры каждого кубика увеличить в 2 раза?





Задача 6. Как изменится масса слона, если увеличить его (по всем размерам) в 2 раза? (Считать, что слон имеет форму параллелепипеда, конечно, нельзя.) Как изменится площадь слона на фотографии?





Задача 7. а) Обозначим площадь круга радиуса 1 через V_2. Чему равна площадь круга радиуса R? б) Обозначим объём шара радиуса 1 через V_3. Чему равен объём шара радиуса R?

Два занятия про размерность

Второе занятие

Задача 0. Чему равна площадь поверхности у куба со стороной а) 10 см; б) 12 см?

Задача 1. Куб со стороной 1 м разрезали на кубики со стороной 1 см и сложили из них башенку с основанием в один кубик. Какова площадь поверхности получившейся башенки? Больше или меньше она площади поверхности исходного куба? Во сколько раз?

Задача 2. Куб с ребром 12, сложенный из кубиков с ребром 1, облили белой краской. У скольких из маленьких кубиков оказалась покрашено 0 граней; 1 грань; 2 грани; 3 грани?

Задача 3. а) Какую долю площади квадрата размером 12×12 составляют приграничные клетки?

б) Какую долю объёма куба размером $12 \times 12 \times 12$ составляют приграничные кубики?

Задача 4. На рынке продаётся два вида арбузов одинакового диаметра. Первый — по 100 рублей, зато с очень тонкой коркой, а второй по 70 рублей, но 20% его радиуса занимает корка (которую придётся выкинуть). Какие арбузы выгоднее покупать?

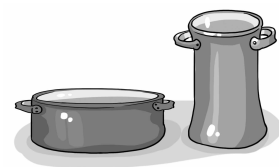
Задача 5. Длина экватора глобуса равна 1 м. а) Каков масштаб глобуса? б) Какую площадь на нём имеет Россия? (Длина земного экватора равна 40 000 км; площадь России — примерно 17 000 000 км^2.)

Задача 6. На кубик размером а) $3 \times 3 \times 3$; б) $100 \times 100 \times 100$ плотно надели бумажный поясок. Зазор какой величины возникнет, если удлинить поясок на 8 (поясок при этом остаётся квадратным)?

Задача 7. Земной шар стянули обручем по экватору. Затем обруч удлинили на 1 м (так, что образовавшийся зазор везде одинаков). Пролезет ли под обручем кошка?

Дополнительные задачи

Задача 8. Какая из кастрюль вместительнее — левая, более широкая, или правая, втрое более высокая, но вдвое более узкая?



Задача 9. На левую чашу весов положили два шара радиусов 3 и 5, а на правую — один шар радиуса 8. Какая из чаш перевесит? (Все шары изготовлены целиком из одного и того же материала.)

Задача 10*. На левую чашу весов положили две круглых монеты, а на правую — ещё одну, так что весы оказались в равновесии. А какая из чаш перевесит, если каждую из монет заменить шаром того же радиуса? (Все шары и монеты изготовлены целиком из одного и того же материала, все монеты имеют одинаковую толщину.)

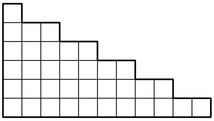
Задача 11. Можно ли вырезать из квадрата со стороной 10 см несколько кружков и приставить их друг к другу так, чтобы получилась цепочка длиной больше километра?

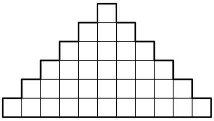
Задача 12. Ширина плоского медного кольца при нагревании увеличилась в 1,5 раза. Как изменилась площадь дырки?

Задача 13. Воздушный шарик (в форме идеального шара) надули так, что его площадь увеличилась на 9%. Как изменился его радиус?

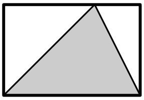
Занятие про площади и суммы

Задача 1. а) В какой из фигурок, изображённых на рисунках, больше квадратиков? б) Найдите число этих квадратиков.

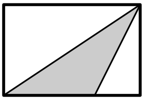




Задача 2. Треугольник лежит в прямоугольной коробке, так что одна из его сторон совпадает с дном коробки, а оставшаяся вершина лежит на противоположной стороне коробки (см. рис. справа). Какую часть площади коробки занимает треугольник?

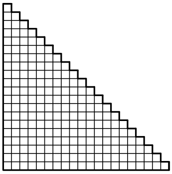


Задача 3. а) Другой треугольник при укладке в коробку перекосило (см. рис. справа). Занимает ли он бóльшую, меньшую, или такую же часть площади коробки, как предыдущий треугольник?



б)* Можно ли положить треугольник площади 10 в прямоугольную коробку площади 19?

Задача 4. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника составляет половину площади квадрата со стороной, равной катету. А какова площадь «пиксельного» (составленного из единичных квадратов) равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, например, 20 (см. рис. справа)?



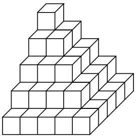
Определение. Площадь пиксельного треугольника с катетом n (то есть число $1 + 2 + 3 + \ldots + n$) называется n-м *треугольным числом* и обозначается T_n.

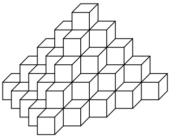
Задача 5. Найдите $T_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Задача 6. Найдите сумму всех двузначных чисел, делящихся на 7.

Задача 7. Найдите сумму двух последовательных треугольных чисел.

Задача 8. На какую из фигур справа уйдёт больше кубиков?

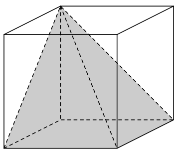


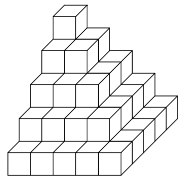


Дополнительные задачи

Задача 9. Докажите «теорему сложения треугольных чисел»: $T_{n+m} = T_n + T_m + nm$.

Задача 10. Какую часть кубической коробки может занимать лежащая в ней (неправильная) четырёхугольная пирамида (см. рис. слева)?





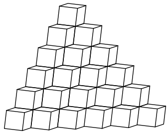
Задача 11*. а) В углу комнаты сложили пирамидку высоты n (см. рис. справа). Сколько на неё ушло кубиков? б) Вычислите сумму $1^2 + \ldots + n^2$.

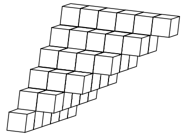
Задача 12*. Найдите n-е *пирамидальное число* — сумму $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ последовательных треугольных чисел.

Задача 13*. Докажите геометрически, что $1+\ldots+n^3 = (1+\ldots+n)^2$.

Занятие по принципу Кавальери

Задача 0. На какую из пирамидок, изображённых на рисунках, уйдёт больше кубиков?





Пусть в пространстве имеются два тела, и пусть проведены все плоскости, параллельные данной. *Принцип Кавальери* утверждает, что если для каждой из плоскостей площадь сечения первого тела равна площади сечения второго тела, то объёмы тел равны.

Задача 1. Сформулируйте аналог принципа Кавальери для плоских фигур.

Задача 2. Докажите принцип Кавальери а) для трапеций, основания которых параллельны направлению сечений; б) для выпуклых многоугольников на плоскости.

Задача 3. Объёмную фигуру растянули в k раз в одном из направлений. Как изменился её объём?

Определение. *Конусом* в этом занятии называется тело, состоящее из плоской фигуры («основания конуса») вместе со всеми отрезками, соединяющими её с некоторой точкой («вершиной конуса») вне плоскости основания.

Задача 4. Пусть площадь основания конуса равна S, а его высота равна h. Найдите площадь сечения этого конуса параллельной основанию плоскостью, проходящей на расстоянии x от вершины.

Задача 5. Докажите, что объём конуса зависит только от его высоты и площади основания (и не зависит от формы основания).

Задача 6. Пусть объём конуса с площадью основания 1 и высотой 1 равен c. Чему равен объём конуса с площадью основания S и высотой h?

Задача 7. Рассмотрев пирамиду с квадратным основанием, найдите c.

Задача 8. Найдите площадь сечения шара радиуса R плоскостью, проходящей на расстоянии x от центра.

Дополнительные задачи

Задача 9*. Докажите, что $T_1 + T_2 + \ldots + T_n = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot n$.

Задача 10*. Докажите, что объёмы шара и описанного около него многогранника относятся так же, как площади их поверхностей.

Задача 11*. а) На клетчатой бумаге нарисован многоугольник M с вершинами в узлах сетки, стороны которого не идут по линиям сетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки внутри M равна сумме длин горизонтальных отрезков сетки внутри M.

б) Как обобщить утверждение на многоугольники, имеющие стороны, идущие по линиям сетки?

Литература

1. И. В. Артамкин, А. Л. Городенцев, А. Г. Кулаков, М. А. Прохоров, С. М. Хорошкин, А. В. Хохлов. *Числа и суммы.* // Математическое образование, № 2–3 (9–10), апрель–сентябрь 1999, с. 2–57.

Препринт доступен по адресу

`http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/scho/ns.ps.gz`

2. Я. И. Перельман. *Занимательная геометрия.* М.–Л., ГТТИ, 1950.

В главе 11 обсуждаются задачи на размерность в духе первых двух занятий брошюры. Книга доступна по адресу

`http://math.ru/lib/book/djvu/perelman/zanim_geom.djvu`

3. Д. Б. Фукс. *Можно ли из тетраэдра сделать куб*? // Квант, 1990, №11.

Популярно рассказывается про инвариант Дена (причину, по которой в определение объема многогранника необходимо включать принцип Кавальери или эквивалентную ему аксиому). Статья доступна по адресу

`http://kvant.mccme.ru/1990/11/mozhno_li_iz_tetraedra_sdelat.htm`

4. И. В. Ященко. *Парадоксы теории множеств.* М.: МЦНМО, 2002.

Можно узнать, почему нельзя определить площадь для всех плоских фигур. Брошюра доступна по адресу

`http://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.20.pdf`

5. А. Д. Блинков. *Вычисление некоторых конечных сумм.* // «Математика для школьников», №4, 2008.

Оглавление