А. А. Заславский, Б. Р. Френкин,
А. В. Шаповалов

Задачи о турнирах

Издание второе, дополненное

Издательство МЦНМО
Москва, 2017

УДК 51(07)
ББК 22.1
З36

Заславский А. А., Френкин Б. Р., Шаповалов А. В.

З36 Задачи о турнирах. — 2-е изд., дополненное. — М.: МЦНМО, 2017.— 104 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0985-1

Десятая книжка из серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам о спортивных турнирах и ориентирована в первую очередь на школьников 6–9 классов. В неё вошли разработки шести занятий математического кружка, а также более 50 дополнительных задач разной сложности. Первые три занятия рассчитаны на начинающих школьников, следующие три — на более подготовленных.

Брошюра адресована руководителям математических кружков и школьным учителям математики. Надеемся, что она будет интересна школьникам, их родителям, а также всем любителям математики, видящим её не только в учебниках, но и в спорте, а также в других проявлениях окружающей нас жизни.

Первое издание книги вышло в 2013 году.

12+

ISBN 978-5-4439-0985-1

Предисловие

Задачи о спортивных соревнованиях регулярно появляются на математических олимпиадах. Двое из авторов этой брошюры попытались собрать наиболее интересные и характерные задачи такого содержания в брошюре «Математика турниров», изданной в 2009 г. (см. список литературы в конце предисловия.) Данное издание пересекается с ней по содержанию, но имеет другую цель: авторы предназначают его *для использования в математических кружках*, рассчитывая на достаточно широкий контингент школьников.

Предлагаемые задачи могут составлять темы отдельных занятий или использоваться в рамках других тем, например, таких как «Графы», «Принцип Дирихле», «Суммирование двумя способами» и др. Здесь может принести пользу *указатель задач по темам в конце брошюры*.

Мелким шрифтом набраны *пояснения для руководителя занятия*. Основной материал разбит на 6 занятий. Их можно ставить подряд или вразбивку, между занятиями другого содержания (или, скажем, дать два занятия по турнирам подряд, а остальные вразбивку). Это может способствовать поддержанию интереса к теме турниров. В большинстве случаев задачи разных занятий решаются независимо друг от друга, поэтому порядок занятий в принципе можно менять.

Номер задачи состоит из номера занятия и номера задачи в занятии, разделённых точкой. В каждом занятии вначале идут задачи, рекомендуемые для решения и разбора непосредственно на кружке, причём после каждой из них приводится ответ и решение, а нередко также комментарии к методу решения. Далее идут задачи для самостоятельного решения. Ответы и решения к ним приводятся после списка этих задач. Отдельный раздел содержит дополнительные задачи. После каждого занятия приведён список дополнительных задач, которые можно добавить к материалу занятия. С другой стороны, часть задач можно при необходимости снять. *Главное — не количество решённых задач, а усвоение идей и приёмов, лежащих в основе решения.*

В конце брошюры приведён раздаточный материал, который состоит из задач каждого занятия на отдельных листках.

Дальнейшие сведения по математике турниров можно найти в литературе, указанной в конце предисловия.

Задачи о турнирах, как правило, наглядны по формулировке, и их решение требует сообразительности, а не каких-то специальных знаний. Поэтому мы не указываем класс школы, для которого предназначена та или иная задача. Простейшие из них заведомо доступны начиная с 5 класса.

Занятие 1 ориентировано преимущественно на 5–7 классы, а занятие 4 на старшие классы. Задачи с произвольным числом участников, партий и т. п. можно давать и с конкретными числами, в особенности в младших классах, где очень существенна наглядность формулировки.

На первом занятии нужно напомнить простейшие понятия, связанные с турнирами (*турнирная таблица*, *системы организации турниров и начисления очков*.)

Турнир — это в принципе любое соревнование, где количество участников больше двух. Содержание турнира может быть самым разным: футбол, шахматы, решение математических задач и т. д. Для нас сейчас важно другое: схема организации турнира и подсчёта очков.

Широко распространены *однокруговые турниры*, когда каждый участник встречается с каждым один раз — играет с ним один *матч* (*партию*). О таких турнирах чаще всего и идёт речь в этой книжке. Бывают и *многокруговые турниры*, когда каждая пара участников встречается несколько раз. Чаще всего за выигранную партию начисляется 1 очко, за ничью пол-очка, за проигрыш 0 (*шахматная система подсчёта очков*). Такая система обычно подразумевается в дальнейшем. В некоторых видах соревнований за победу начисляется 2 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. А в *футболе* за выигрыш начисляется 3 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. В последнее время в *волейбольных* турнирах, если встреча заканчивается со счетом 3 : 0 или 3 : 1, то выигравшая команда получает 3 очка, а проигравшая 0, если же игра закончилась со счетом 3 : 2, то 2 и 1 очко соответственно. Турниры по «большому» и настольному *теннису* имеют ту специфику, что в них невозможны ничьи. Бывают и другие схемы организации турниров. В частности, при *кубковой*, *или олимпийской системе* (см. занятие 6) турнир состоит из нескольких туров, в каждом из которых участники проводят по одной встрече и проигравший «вылетает» (если в туре участвует нечётное число спортсменов, то один из них по жребию «отдыхает» и проходит в следующий тур).

Сумма очков, набранных спортсменом во всех партиях, является его *результатом*. Отдельную партию называют *результативной*, если она закончилась победой одного из участников, и *ничейной* в противном случае.

Итоги турнира оформляются в виде *турнирной таблицы*. Каждая её строка и каждый столбец соответствует одному из игроков (участников турнира). На пересечении какой-либо строки А и столбца Б стоит результат встречи игрока А с игроком Б. (В некоторых задачах вы увидите и другие таблицы, где, например, указано количество забитых и пропущенных мячей.)

Перечисленные термины дальше употребляются, как правило, без пояснения.

Авторы благодарны А. Д. Блинкову за дополнительный материал и ценные замечания, позволившие значительно улучшить брошюру.

Использованная литература

1. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. (составители). *Московские математические регаты.* — М.: МЦНМО, 2007.

2. Гуровиц В. М., Ховрина В. В. *Графы* (изд. 2-е, исправленное). — М.: МЦНМО, 2011.

3. Заславский А. А., Френкин Б. Р. *Математика турниров.* — М.: МЦНМО, 2009.

4. Медников Л. Э. *Чётность.* — М.: МЦНМО, 2009.

5. Медников Л. Э., Шаповалов А. В. *Турнир городов*: *мир математики в задачах.* — М.: МЦНМО, 2012.

6. Толпыго А. К. *Тысяча задач международного математического Турнира городов* (изд. 2-е, дополненное). — М.: МЦНМО, 2010.

7. Фёдоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В. *Московские математические олимпиады 1993–2005 г.* (изд. 2-е, исправленное и дополненное). — М.: МЦНМО, 2008.

8. Шаповалов А. В. *Как построить пример*? — М.: МЦНМО, 2013.

9. Шаповалов А. В. *Принцип узких мест* (изд. 3-е, дополненное). — М.: МЦНМО, 2012.

10. Шаповалов А. В., Медников Л. Э. XVII *Турнир математических боёв им. А.П. Савина.* — М.: МЦНМО, 2012.

Использованы также материалы турниров им. А. П. Савина прошлых лет и задачи с различных соревнований школьников, опубликованные в Интернете, — см., например,

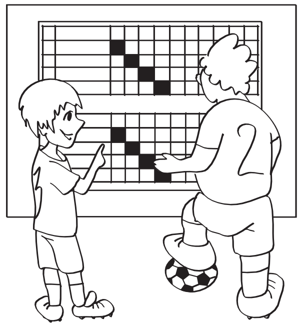
`http://olympiads.mccme.ru/mmo`,

`http://www.turgor.ru/problems`,

`http://olympiads.mccme.ru/regata`.

Занятие 1

Восстанови результаты



Знакомство с турнирами младшие школьники (5–7 класс) обычно начинают с задач, где дана частично заполненная турнирная таблица и надо восстановить недостающие данные. Сначала это кажется волшебством: почти из ничего получить всё. Особых знаний тут не требуется, достаточно умения логически мыслить. С точки зрения обучения, восстановление таблиц занимает ту же нишу, что и решение числовых ребусов. Но возня с таблицами и их возможными вариантами для любителя спорта вещь естественная, тогда как ребусы для многих — задачи искусственные. И хотя к ребусам легче привыкнуть, зато задачи про таблицы лучше развивают совершенно необходимый навык перевода с обычного языка на математический. Методы решения кажутся простыми, но они достаточно фундаментальны: перебор, принцип крайнего, принцип узких мест, оценка. На эти приёмы стоит обращать внимание при обсуждении решения задач — мягко, но регулярно.

Школьники 8 класса и старше могут начинать со второго занятия. В любом случае необходимо напомнить основные понятия, связанные с турнирами (см. предисловие).

Начнём со следующей несложной задачи.

Задача 1.1. Команда «Вымпел» во втором матче турнира забросила больше шайб, чем в первом, а в третьем матче — на 6 шайб меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трёх матчах «Вымпел» забросил 6 шайб. Мог ли «Вымпел» выиграть все 3 матча?

Ответ: не мог.

Решение. В первых двух матчах «Вымпел» забросил не больше шести шайб. Но и не меньше шести, так как в третьем матче «Вымпел» забросил на 6 шайб меньше. Значит, это число равно 6, и в третьем матче «Вымпел» забросил 0 шайб. Поэтому третий матч «Вымпел» не выиграл.

Путь к решению. *Узким местом* (где меньше всего неопределённость) оказалась сумма заброшенных шайб в двух первых матчах. Мы её «зажали с двух сторон» и однозначно определили. Важно и то, что число забитых шайб в третьем матче оказалось *крайним*, то есть наименьшим из возможных.

Задача 1.2. Аня, Боря, Валя и Гена сыграли однокруговой турнир в крестики-нолики и начали заносить результаты в турнирную таблицу (В — число выигрышей, Н — ничьих, П — поражений). Они успели заполнить только 4 клетки (см. рис.). Заполните все остальные клетки.

	Аня	Боря	Валя	Гена	**В**	**Н**	**П**
Аня						2	
Боря						1	
Валя					3		
Гена							1

Ответ: см. таблицу: выигрыш +, ничья =, проигрыш −.

	Аня	Боря	Валя	Гена	**В**	**Н**	**П**
Аня		=	−	=	0	2	1
Боря	=		−	−	0	1	2
Валя	+	+		+	3	0	0
Гена	=	+	−		1	1	1

Решение. Валя выиграла три игры, значит, выиграла у всех. Аня проиграла Вале, значит, две её ничьи — с Борей и Геной. Боря и Гена не сыграли вничью, иначе у Бори было бы две ничьи. Но Гена Боре и не проиграл, иначе у Гены было бы два поражения. Значит, Гена у Бори выиграл.

Путь к решению. Мы последовательно обращали внимание на *крайние* значения в таблице, которые давали нам максимум информации: 3 выигрыша Вали, затем 2 ничьих Ани. Чтобы определить результат последней игры Гена — Боря, мы устроили *перебор вариантов*, последовательно приводя невозможные варианты к *противоречию*.

Комментарий. Можно было воспользоваться и *арифметическими свойствами* таблицы Выигрышей-Ничьих-Поражений. Полезно обратить внимание на то, что: 1) сумма в каждой строке равна 3 (число игр одного участника); 2) сумма в столбце В равна сумме в столбце П (общее число выигрышей равно числу поражений); 3) сумма в столбце Н чётна, она равна удвоенному числу ничьих в турнире.

Задача 1.3. Ниже приведена таблица группового этапа одного из чемпионатов мира по футболу. Определите счёт во всех матчах.

	В	Н	П	М
Италия	1	2	0	1 : 0
Уругвай	1	1	1	2 : 1
Швеция	1	1	1	2 : 2
Израиль	0	2	1	1 : 3

Каждая команда сыграла с каждой один матч, В — число побед команды, Н — число ничьих, П — число поражений, М — количество забитых (*слева*) *и пропущенных* (*справа*) *мячей.*

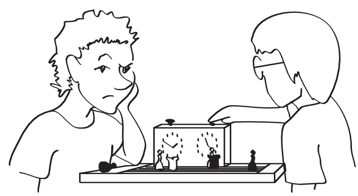
Решение. Италия могла победить только со счётом 1 : 0, остальные матчи сыграла вничью 0 : 0. Израиль и Италия сыграли вничью со счётом 0 : 0 (иначе каждая из этих команд сделала обе свои ничьи с Уругваем и Швецией, и у Швеции две ничьи — противоречие). Вторая ничья Израиля 1 : 1 (если тоже 0 : 0, то Израиль проиграл со счётом 1 : 3, но никто не забил трёх голов). Значит, Израиль проиграл 0 : 2. Уругвай пропустил всего 1 гол, поэтому проиграл 0 : 1 и сделал ничью 0 : 0, значит, выиграл 2 : 0. Ни Италия, ни Уругвай не играли 1 : 1, поэтому ничью 1 : 1 Израиль сделал со Швецией. В остальных двух матчах Швеция забила всего 1 гол, значит, выиграла 1 : 0, поэтому и проиграла 0 : 1. Счёт 2 : 0 встретился всего один раз — в матче Уругвай–Израиль. Счёт 0 : 0, кроме матча Италия–Израиль, встретился ещё только в матче Италия–Уругвай. Значит, третий матч Италия выиграла у Швеции 1 : 0, и в матче Швеция–Уругвай счёт 1 : 0.

	Италия	Уругвай	Швеция	Израиль
Италия		0 : 0	1 : 0	0 : 0
Уругвай	0 : 0		0 : 1	2 : 0
Швеция	0 : 1	0 : 1		1 : 1
Израиль	0 : 0	0 : 2	1 : 1	

Путь к решению. *Узким местом* является малое число забитых и пропущенных голов, а также большое число ничьих. Важную роль здесь играет *двойственность* (частный случай *соответствия*): каждый забитый гол одновременно является и пропущенным, а каждый счёт в таблице *встречается дважды* — в прямом и в обратном порядке.

В следующих задачах надо считать набранные очки. Результат команды или игрока в турнире определяется по сумме очков, набранных в отдельных встречах. Решение и обсуждение следующей задачи поможет разобраться с подсчётом суммы очков турниров и их частей.

Задача 1.4. а) В однокруговом шахматном турнире с восемью участниками все партии закончились вничью. Сколько всего очков набрали участники? А сколько всего партий было сыграно?



б) В незаконченном шахматном турнире сыграно пока только 15 партий. Сколько всего очков успели набрать участники?

в) Закончился однокруговой шахматный турнир с 16 участниками. Чему равна сумма набранных очков?

Ответ: а) 28 очков и 28 партий; б) 15 очков; в) 240 очков.

Решение. а) Каждый участник набрал семь раз по $\frac{1}{2}$, то есть всего по 3,5 очка. Соответственно, 8 участников набрали $8 \cdot 3{,}5 = 28$ очков.

Число партий можно посчитать так: первый сыграл 7 партий, второй — 6 партий (не считая партии с первым), третий — 5 партий (не считая партий с первым и вторым), и т. д. Итого $7+6+5+4+3+2+1 = 28$. Совпадение с числом очков не случайно: действительно, ведь в каждой партии соперники получили по $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ очку. Отсюда ясно, *как считать число партий в любом однокруговом турнире*: *надо число участников умножить на число партий одного человека и поделить пополам.*

б) При ничьей игроки в сумме получают одно очко. Но ведь и при выигрыше тоже. Раз так, общее число очков равно числу сыгранных партий, то есть 15.

в) Мы уже заметили, что сумма очков не зависит от результатов партий. Поэтому можно считать сумму очков для случая, когда все ничьи: $16 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 120$.

Задача 1.5. В однокруговом турнире четырёх команд с начислением очков по системе 2–1–0 команда А набрала 5 очков, Б — 2 очка, В — 1 очко. Какое место заняла команда Г?

Ответ: второе место.

Решение. Всего команды набрали $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ очков, команда Г набрала $12 - 5 - 2 - 1 = 4$ очка и заняла второе место.

Обратите внимание, что здесь мы получили ответ, не восстанавливая результатов всех матчей. Более того, здесь нельзя восстановить достоверно результат *ни одного* матча!

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.6. Команда «Метеор» в третьем матче турнира забросила втрое больше шайб, чем в первом, а во втором и четвёртом матчах — в сумме на 8 шайб меньше, чем в первом и третьем вместе взятых. Известно, что в этих четырёх матчах «Метеор» забросил не более 11 шайб. Какое наибольшее число из этих матчей он мог выиграть?

Задача 1.7. В однокруговом турнире участвовали шахматисты А, Б, В, Г и Д. При равенстве очков место определялось по дополнительным показателям. Известно, что Б занял второе место и набрал больше очков, чем В, Г и Д вместе. Каков результат партии между А и Б?

Задача 1.8. В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

Задача 1.9. В футбольном турнире пяти команд победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

Задача 1.10. В однокруговом шахматном турнире у каждого из игроков чего-то было столько, сколько у остальных вместе: у Оси — очков, у Нины — ничьих (в одной был пат), у Проши — проигрышей, а у Зины — зевков ферзя. Восстановите результаты всех партий.

Задача 1.11. В однокруговом шахматном турнире участвовали 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Ответы и решения

1.6. Ответ: 2 матча.

Решение. В первом и третьем матче «Метеор» забросил в сумме не более 11 шайб. Но эта сумма в 4 раза больше числа шайб, заброшенных в первом матче, значит, она делится на 4. Поэтому сумма не больше 8. Но её можно уменьшить на 8, значит, она и не меньше 8. Итак, сумма равна 8. Но тогда во втором и четвёртом матчах «Метеор» забросил 0 шайб, значит, он эти матчи не выиграл. А первый и третий он мог выиграть, например, со счётом 2 : 0 и 6 : 0 соответственно.

Запомните приём: неравенство для целых чисел можно *усилить, используя делимость*.

1.7. Ответ: ничья.

Решение. Троица В, Г и Д сыграла внутри себя 3 партии, в каждой разыгрывалось одно очко, поэтому в сумме они набрали не менее трёх очков. Значит, у Б не менее 3,5 очков. Пять шахматистов сыграли между собой десять партий, поэтому в сумме набрали десять очков. Тогда А набрал не больше чем 10 – 3 – 3,5 = 3,5 очка. Но и не меньше, так как у А очков не меньше, чем у Б. Значит, у А ровно 3,5 очка. Но тогда у Б не больше 3,5 очков, то есть и у Б ровно 3,5 очка. Поэтому у В, Г и Д вместе — 3 очка. Значит, все встречи с А и Б эта троица проиграла. Во встречах с ней А и Б набрали по 3 очка, значит, оставшиеся пол-очка они получили во встрече между собой, то есть сыграли вничью.

1.8. Ответ:

	А	Б	В	Г	Очки	Места
А		1	3	3	7	I
Б	1		1	1	3	II
В	0	1		1	2	III–IV
Г	0	1	1		2	III–IV

Решение. У команд В и Г не более чем по 2 очка, поэтому нет побед и между собой они сыграли вничью. Команда Б в обоих матчах против В и Г получала очки, значит, в каждом — меньше трёх очков, то есть оба матча сыграла вничью, заработав 2 очка. Тогда третье очко команда Б заработала ничьей с А. Команда В заработала 2 очка в матчах против Б и Г, значит, В проиграла А. Аналогично, команда Г проиграла А.

Путь к решению. *Узким местом* является малое число очков команд Б, В, Г, особенно в сравнении с числом очков за победу.

Комментарий. В приведённом решении удалось полностью избежать перебора вариантов за счёт правильного порядка при выборе *узких мест*. Однако большинство школьников будут предлагать решения с применением *перебора* (например, рассмотрев два варианта получения трёх очков командой Б). Это нормально, правильные решения нужно засчитывать. Однако всегда полезно показать, как *в конкретных случаях перебор можно сократить за счет того или иного наблюдения*.

1.9. Ответ: 6 ничьих.

Решение. Победитель сыграл 4 матча, в каждом набрал не более трёх очков (причем ровно 3 только в случае победы), значит, всего у него *не более* 12 очков. Остальные команды в каждом из шести матчей между собой набрали в сумме не менее двух очков (причем 2 только в случае ничьей), поэтому в сумме набрали *не менее* 12 очков. Указанное в условии равенство достигается только при 12 очках, то есть когда победитель всё выиграл, а все 6 остальных встреч были ничейными.

1.10. Ответ: Ося всё выиграл, Проша проиграл Зине, а Нина с Прошей и Зиной сыграла вничью.

Решение. Ося набрал в трёх партиях не более трёх очков, а остальные игроки в трёх партиях между собой набрали не менее трёх очков. Значит, Ося набрал 3 очка и всё выиграл. Поэтому проигрышей не меньше трёх. У Нины есть ничья, значит, из шести партий проигрыш был не более чем в пяти. Сложив два одинаковых числа — Прошины и не Прошины проигрыши, — получим чётное число. Значит, проигрышей всего четыре, из них два у Проши и два — у других. Нина и Зина проиграли Осе, значит, остальные партии они не проиграли. Каждая ничья Нины считается и ещё кому-то, значит, в партиях без Нины ничьих нет. Поэтому Зина у Проши выиграла. Мы нашли уже четыре проигрыша, значит, Нина с Прошей и Зиной сыграла вничью.

Замечание. Условие про число зевков ферзя несущественно и в решении не использовалось.

1.11. Ответ: победил игрок, занявший третье место.

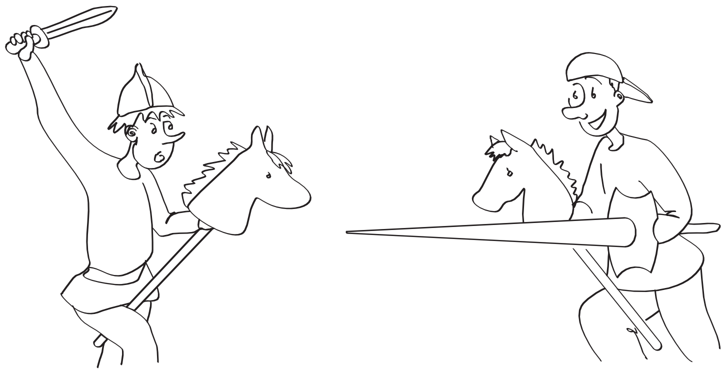
Решение. Пусть первые три места заняли соответственно игроки А, Б и В. Четыре последних игрока сыграли между собой 6 игр и уже только в этих играх набрали шести очков. Это значит, что у Б не менее шести очков. У А их ещё больше — 6,5 или 7 (а больше за 7 игр не набрать). Если А имеет 6,5 очков, то у Б меньше, то есть ровно 6. А если А имеет 7 очков, то он у всех выиграл, в том числе и у Б, поэтому у Б тоже только 6 очков. Значит, и у последних четырёх игроков ровно 6 очков, то есть все очки они набрали в играх между собой, а остальным проиграли. В частности, игрок В выиграл у игрока на седьмом месте.

К задачам этого занятия можно добавить какие-либо из дополнительных задач Д1–Д9.

Занятие 2

Простейшие факты о турнирах

Школьники восьмого класса и старше могут начинать с этого занятия. При этом полезно напомнить им основные понятия (см. предисловие). Разумеется, в дальнейшем можно использовать и задачи из первого занятия.



Задача 2.1. В однокруговом турнире участвовали n шахматистов.

а) Сколько партий сыграно и сколько набрано очков?

б) Очки считались по футбольной системе. Какова наибольшая и какова наименьшая возможная сумма очков?

Решение. а) Было сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ партий, и соответственно набрано в сумме $\frac{n(n-1)}{2}$ очков. Рассуждение такое же, как в задаче 1.4. (Проведите его подробно!)

б) Как уже отмечено, при футбольной системе подсчёта сумма очков равна 2 в ничейной партии и 3 в результативной. Поэтому сумма очков максимальна, если ничьих не было, и минимальна, если все партии ничейные. Количество партий найдено в п. а). Получаем, что наибольшая возможная сумма очков равна $\frac{3n(n-1)}{2}$, а наименьшая $n(n-1)$.

Запомните приём: при футбольной системе подсчёта очков, сравнивая сумму очков с ситуацией, когда все партии результативные (или, наоборот, ничейные), мы можем узнать число ничьих.

Сравним предыдущую задачу с такой: n городов попарно соединены авиамаршрутами, найдите количество маршрутов.

Различается ли математическое содержание этих задач? Почему?

Ответ: нет. Действительно, заменим каждый город игроком, а каждый маршрут партией, и одна задача превратится в другую.

Задача 2.2. а) Докажите, что в любой момент число участников турнира, завершивших до этого вничью нечётное число партий, чётно.

б) В турнире участвуют 15 шахматистов. Возможна ли такая ситуация, что к некоторому моменту турнира каждый из них сыграл ровно 7 партий?

Решение. а) Общее число очков — целое (оно равно числу партий). Игрок с нечётным числом ничьих набирает полуцелое число очков. Поэтому число таких игроков — чётно.

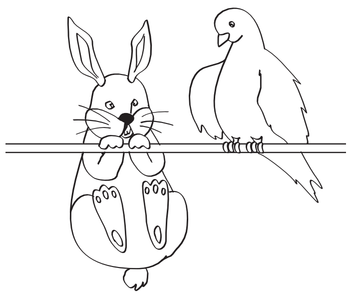
б) Нет. Действительно, сложим количества партий, сыгранных каждым шахматистом. При этом каждая партия будет засчитана дважды, поэтому сумма будет чётной. Но если каждый из 15 шахматистов сыграл по 7 партий, то эта сумма равна $15 \cdot 7 = 105$ — противоречие. Можно рассуждать и по-другому: предположим, что все сыгранные партии завершились вничью. Тогда получим противоречие с предыдущим пунктом.

В решении п. б) мы применили распространенный приём *суммирования двумя способами:* вычисляем некоторую сумму двумя способами, приравниваем полученные результаты, и это позволяет решить задачу.

Задача 2.3. Несколько команд участвуют в однокруговом футбольном турнире. Докажите, что независимо от расписания игр в любой момент найдутся хотя бы две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

Решение. Обозначим количество команд через n. Рассмотрим произвольный момент турнира. К этому моменту каждая команда могла сыграть от 0 до $n-1$ матчей: различных вариантов ровно n, то есть столько же, сколько команд. Пусть все команды сыграли разное количество матчей. Тогда каждый из n вариантов реализован ровно одной командой. Следовательно, какая-то команда не сыграла ни одного матча, а другая команда сыграла $n-1$ матчей, то есть играла со всеми остальными командами. Но тогда она играла и с той командой, которая не сыграла ни одного матча, — противоречие.

В решении этой задачи мы применили *принцип Дирихле*, который полезен и во многих других «задачах на сообразительность». Часто его формулируют так: *если в клетках сидят кролики и количество клеток меньше количества кроликов, то в какой-то клетке сидит более одного кролика.* Нередко кроликов и клетки заменяют голубями и жердочками. Выясните: что в нашей задаче играло роль кроликов и что — клеток?



Следующий факт выглядит неожиданно, но доказывается просто.

Задача 2.4. Докажите, что если в однокруговом турнире все участники, кроме одного, набрали одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл.

Решение. Пусть «нетипичный» участник набрал больше очков, чем «типичные». Результат «среднеарифметического» участника составляет $\frac{n-1}{2}$. В сумме все участники набрали $\frac{n(n-1)}{2}$ очков, поэтому «типичные» участники набрали меньше «среднего», а «нетипичный» больше. При этом недобор «типичного» участника до этого количества не может быть меньше $\frac{1}{2}$, поэтому «типичные» недобрали в сумме не менее чем $\frac{n-1}{2}$ очков. «Нетипичный» должен на столько же превысить средний уровень, то есть он получил не меньше $n-1$ очков. Это возможно лишь в случае, когда «нетипичный» у всех выиграл.

Аналогично разбирается случай, когда «нетипичный» набрал меньше, чем «типичные».

В этой задаче мы применили ещё один распространённый приём, который можно назвать *двусторонней оценкой*. Мы нашли наименьший возможный результат «нетипичного» участника, и оказалось, что он равен наибольшему возможному в турнире, откуда следует ответ.

Теперь докажем факт, который используется во многих задачах. Здесь требуется идея, которая нам уже встречалась.

Задача 2.5. Докажите, что если в однокруговом турнире любые два игрока набрали разное количество очков, а ничьих не было, то занявший первое место выиграл у всех, занявший второе — у всех, кроме первого, ..., последний всем проиграл.

Решение. Если в турнире не было ничьих, то количества побед — целые числа в промежутке от 0 до $n-1$. Если все они различны, то это все целые числа от 0 до $n-1$ включительно. Очевидно, игрок с $n-1$ победами выиграл у всех остальных. Тогда игрок с $n-2$ победами выиграл у всех, кроме первого, и т. д.

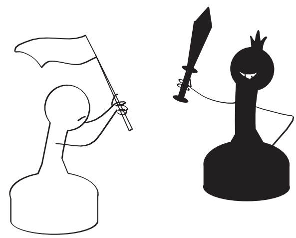
Таким образом, в этой задаче надо применить принцип Дирихле, о котором говорилось после задачи 2.3.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.6. а) Сколько шахматистов играло в однокруговом турнире, если всего в этом соревновании было сыграно 190 партий?

б) Сколько шахматистов играло в однокруговом турнире, если всего было набрано больше 50, но меньше 60 очков?

в) Сколько команд играло в однокруговом турнире, если всего было набрано больше 50, но меньше 60 очков по системе 2–1–0?



Задача 2.7. В шахматном турнире каждый участник выиграл белыми столько же партий, сколько все остальные вместе чёрными. Докажите, что у всех поровну побед.

Задача 2.8. Шахматист сыграл в турнире 20 партий и набрал 12,5 очков. На сколько больше он выиграл партий, чем проиграл?

Задача 2.9. а) Шахматист сыграл в турнире p партий и победил на r раз больше, чем проиграл. Сколько очков он набрал?

б) В шахматном турнире сумму очков заменили на разность между числом побед и числом поражений. Изменится ли распределение мест шахматистов?

в) В футбольном турнире было сыграно m матчей, из них v закончились победой одной из команд. Чему равна сумма набранных командами очков?

Задача 2.10. В однокруговом турнире была применена система подсчёта очков 2–1–0. Вася набрал очков меньше Пети. Может ли у него стать очков больше, чем у Пети, если результаты пересчитать

а) по шахматной системе (за победу 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$, за поражение 0),

б) по футбольной системе (за победу 3 очка, за ничью 1, за поражение 0)?

Задача 2.11. В соревнованиях по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвует 47 боксёров. Сколько поединков надо провести, чтобы определить победителя?

Ответы и решения

2.6. Ответ: а) 20 шахматистов; б) 11 шахматистов; в) 8 команд.

Решение. а) Из задачи 2.2 мы знаем, что в однокруговом турнире с n участниками играется $\frac{n(n-1)}{2}$ партий. В данном случае $\frac{n(n-1)}{2} = 190$. Разложением на множители легко подобрать ответ $n = 20$. При меньших значениях n число игр будет меньше, а при бо́льших — больше. Следовательно, ответ единственный.

б) Пусть в турнире участвовали n шахматистов. Тогда сумма их результатов равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Между 50 и 60 есть только одно число такого вида, а именно 55, и тогда $n = 11$.

в) При системе 2–1–0 сумма результатов равна $n(n-1)$, если число участников равно n. Между 50 и 60 есть ровно одно число такого вида, а именно $56 = 8 \cdot 7$.

2.7. Решение. Число побед каждого участника равно общему числу партий, выигранных чёрными.

2.8. Ответ: на 5 партий больше.

Решение. Можно решать «с иксом и игреком», но проще рассуждать так. Если бы шахматист свёл все партии вничью, он бы набрал 10 очков. Если какая-то партия в действительности выиграна, то сумма очков увеличивается на пол-очка, а если проиграна — уменьшается на пол-очка. По условию сумма равна $12,5 = 10 + 0{,}5 \cdot 5$, откуда получаем ответ.

Здесь применён приём, который полезен и в других задачах: ситуация, о которой говорится в задаче, сравнивается с другой ситуацией, для которой ответ очевиден. См., например, задачу Д11.

2.9. Решение. а) *Первый способ.* Пусть у шахматиста w побед, d ничьих и l поражений. Тогда он набрал $w + \frac{d}{2}$ очков. По условию $w - l = r$, $w + l + d = p$. Сложив эти два равенства, получим $2w + d = p + r$. Разделив обе части пополам, видим, что $\frac{p+r}{2}$ равно числу набранных очков.

Второй способ. Если бы шахматист сыграл все партии вничью, он набрал бы $\frac{p}{2}$ очков. Заменяя пару ничьих на победу и поражение, мы сумму очков не изменим. Заменим столько пар, чтобы число поражений стало нужным. Теперь надо еще заменить r ничьих на победы, чтобы сделать число побед нужным. При этом сумма очков возрастёт на $\frac{r}{2}$.

б) **Ответ:** нет.

Это следует из ответа к предыдущему пункту: больше очков набрал тот шахматист, у которого указанная разность больше.

в) **Ответ:** $3v + 2(m - v) = 2m + v$.

2.10. Ответ: а) нет, не может; б) да, может.

Решение. а) При переходе от системы 2–1–0 к шахматной результат (сумма очков) каждого участника уменьшается вдвое. Поэтому больший результат так и остаётся больше.

Комментарий. Таким образом, по существу в обоих случаях одна и та же система. *Удобство системы* 2–1–0 *в том, что результаты всегда целые, а шахматной системы в том, что сумма очков равна количеству партий.*

б) Пусть, например, Вася выиграл у каких-то двух игроков А и Б и проиграл игрокам В, Г, Д, а Петя со всеми этими игроками сыграл вничью. Пусть все остальные партии турнира (в том числе между Васей и Петей) закончились вничью. Тогда по системе 2–1–0 Вася набирает на очко меньше, чем Петя, а по футбольной системе — на очко больше.

2.11. Ответ: 46 поединков.

Решение. Действительно, в каждом поединке выбывает один участник, а в итоге выбывают все, кроме одного. Значит, поединков на 1 меньше, чем участников. (Разумеется, этот факт верен при любом количестве участников.)

К задачам этого занятия можно добавить какие-либо из дополнительных задач Д10—Д15.

Занятие 3

Примеры и контрпримеры

В этом занятии собраны задачи с вопросами «можно ли» и задачи на оценку+пример. Доказательства невозможности и оценки находятся приёмами «как такое может быть», чётность и чередование, подсчёт двумя способами. Примеры строятся методами постепенного конструирования, симметрии, «увидеть знакомое», «как такое может быть» (последний часто является продолжением оценки).

При построении примеров обычно требуется, чтобы выполнялись какие-то условия, на первый взгляд взаимоисключающие. Неопытным школьникам такие задачи кажутся сложными: одних отпугивают «противоречия», других, наоборот, — избыток свободы в условиях, третьих — неопределённая постановка вопроса («можно ли», «для какого наименьшего/наибольшего»). Цель данного занятия: на примерах задач о турнирах продемонстрировать общие подходы к таким задачам.

Надо показать, что, задавшись вопросом «как такое может быть?», можно из противоречий вывести ключ к решению, а избыток свободы в условиях убрать, добровольно наложив некоторые естественные ограничения.

Задача 3.1. В однокруговом турнире победитель набрал больше очков, чем любая другая команда. Может ли какая-то другая команда иметь больше побед, если очки считаются

а) по системе 2–1–0,

б) по футбольной системе?

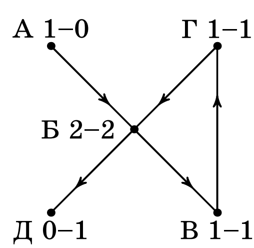
Ответ: может.

Решение. а) Пусть в турнире команд А, Б, В, Г, Д в тройке (Б, В, Г) команды победили друг друга по кругу, А победила Б, Б победила Д, а все остальные встречи закончились вничью. Тогда у А одна победа, а у Б — две. Но положение команды определяется, как мы помним (см. занятие 2, задачу 2.9а), разностью числа побед и поражений. Эта разность равна $+1$ у А, -1 у Д и 0 у остальных команд, поэтому А — победитель.

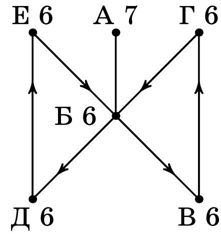
б) Пусть в турнире команд А, Б, В, Г, Д, Е в тройках (Б, В, Г) и (Б, Д, Е) команды победили друг друга по кругу, А победила Б, а все остальные встречи закончились вничью. У команды А одна победа и 4 ничьих, то есть 7 очков. У команды Б две победы, ничьих нет, то есть 6 очков. У любой другой команды одна победа и 3 ничьих, то есть тоже 6 очков.

Путь к решению. а) Нам надо считать победы и очки. Но число очков определяется разницей между победами и поражениями! Её считать удобнее, поскольку можно не обращать внимания на ничьи. Рассуждения полезно оформлять графически, проводя стрелку от победителя к побежденному, а рядом выписывая разницу как разность.

Как такое может быть? Если А — победитель, а у Б — больше побед, то у Б — худшая разница. Будем *строить* пример *постепенно*. Увеличить число побед, не меняя разницы, можно за счёт побед по кругу: скажем, Б победила В, В — Г, а Г — Б. Но у победителя разность положительна, значит, есть победа, поэтому нужна команда с двумя победами. Пусть Б победила ещё Д и кому-нибудь проиграла. Тогда у Б будут две победы, а разница 0. Надо ещё, чтобы команда А кого-нибудь победила. А у нас как раз свободно место победителя команды Б — пусть это А победила Б. Теперь по победам и разнице всё сходится, а все неупомянутые игры пусть закончились вничью (см. рис.).



б) Проверим, насколько предыдущий пример годится для футбольной системы. У А одна победа и 3 ничьих, то есть 6 очков. У Б две победы, ничьих нет — тоже 6 очков. У В и Г по одной победе и по 2 ничьих, то есть по 5 очков, у Д — 3 очка. Не совсем то, что надо, но *попробуем улучшить*. Хочется добавить очков команде А, не добавляя их команде Б и не добавляя побед А. Добавим команду Е, которая с А сыграет вничью, а команду Б победит. Теперь у А 7 очков, у Б — 6, у Е — 4. Надо понять, как команде Е сыграть с остальными. Командам В и Г можно добавить не больше чем по очку, значит, проигрывать им нельзя. Но и выиграть нельзя, а то Е догонит А. Итак, у Е с Г и В — ничьи, то есть уже 6 очков. Отлично, Е может проиграть Д, тогда у Д станет только 6 очков. Получилась красивая симметричная картинка (см. рис.). До неё, впрочем, можно было догадаться и из соображений симметрии.



Задача 3.2. В однокруговом турнире каждый участник играет в день не более одного раза.

а) Можно ли провести турнир девяти команд за 8 дней?

б) Как провести турнир девяти команд за 9 дней?

в) Как провести турнир десяти команд за 9 дней?

Решение. а) Нельзя. Чтобы сыграть свои восемь встреч за восемь дней, каждая команда должна играть каждый день. Но уже в первый день из-за нечётности числа команд какая-то команда не сыграет.

б) Расставим участников в вершинах правильного девятиугольника. Каждый день проводим диаметр через одну из вершин. Участник на диаметре игру пропускает, а остальные разбиваются на четыре пары, симметричные относительно этого диаметра. Поскольку для каждой пары вершин диаметр, проходящий через середину соединяющей их хорды, пройдёт и через вершину девятиугольника, каждый с каждым сыграет по разу.

в) Расставим 9 участников в вершинах правильного девятиугольника, а десятого поместим в его центр. Каждый день проводим диаметр через одну из вершин. Участники на диаметре играют между собой, а остальные разбиваются на 4 пары, симметричные относительно этого диаметра. Как и раньше, каждый сыграет с каждым.

Комментарий. Решения пунктов а) и б) легко обобщаются на любой турнир с нечётным числом участников, а в) — на турнир с чётным числом участников. Нетрудно видеть, что эти способы позволяют провести турнир с данным числом участников за минимально возможное количество дней.

Путь к решению. В формулировке задачи все участники турнира поставлены в равные условия по отношению к остальным. Поэтому естественно строить турнир, отталкиваясь от *симметричных* объектов, особенно от таких известных, как правильный многоугольник. Любитель алгебры, впрочем, предпочёл бы опереться на остатки по модулю 9 — и такое решение тоже есть!

Задача 3.3. В однокруговом турнире участвовали 11 команд. Назовём игру *косой*, если в ней встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечётном числе игр этого турнира.

а) Мог ли турнир пройти без косых игр?

б) Могла ли за весь турнир случиться ровно одна косая игра?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. а) *Первый способ.* Сложим для всех игр турнира суммы, о которых говорится в условии задачи. Этот же результат можно подсчитать другим способом: суммируя вклады команд. Каждая из пятнадцати команд вносит нечётный вклад: $0 + 1 + 2 + \ldots + 13 = 91$. Значит, в результате получится нечётное число. Следовательно, в сумме по играм хотя бы одно из слагаемых нечётно.

Второй способ. Предположим противное: все игры — не косые и делятся на *чётные* (к которым обе команды подошли с чётным «багажом») и *нечётные*. У каждой команды нечётные и чётные игры чередуются, поэтому она участвовала в 7 чётных играх. Но тогда всего чётных игр $15 \cdot 7 : 2$ — нецелое число. Противоречие.

б) Покажем, что если расписание турнира с одной косой игрой возможно для n команд, то оно возможно и для $n + 4$ команд. После проведения турнира из *n старых* команд добавим *новые* команды А, Б, В и Г. Проведём игры А–Б, В–Г, А–В, Б–Г и А–Г. Команды А и Б сыграли разное по чётности число игр (3 и 2), поэтому одна из старых команд К может сыграть с ними (в том или другом порядке). После этого К может сыграть с командами В и Г. При этом все новые сыграют по разу, то есть в парах А и Б, В и Г сохранятся разные чётности. Поэтому можно повторять процедуру с каждой из остальных старых команд, а в конце провести заключительный матч Б–В.

В турнире трёх команд ровно одна косая игра, поэтому, как мы показали, можно провести такой турнир и для семи, а значит, и для одиннадцати команд.

Идеи к решению. а) Попытка построить турнир без косых игр проваливается. *Предположив противное*, то есть что турнир без косых игр есть, мы получаем разбиение игр на две категории: *чётные* и *нечётные*. Это сразу заставляет подумать о *чередовании*.

б) Нужный турнир для одиннадцати команд сразу построить трудно. Лучше исследовать турниры с меньшим числом участников. Далее разумно попытаться действовать методом *постепенного улучшения*: строить нужные турниры, добавляя участников. Из-за связи с чётностью не получается добавлять по одному участнику, а только по четыре.

Комментарий. В задачах на «Оценку+Пример» прежде всего надо обратить внимание на то, что решение имеет две части: построение наилучшего примера и доказательство невозможности ещё лучшего.

Задача 3.4. В однокруговом турнире десяти команд команда А набрала очков больше любой другой, а Я — меньше любой другой. Какой наименьший разрыв в очках может быть между командами А и Я, если очки считаются

а) по системе 2–1–0,

б) по футбольной системе?

Ответ: а), б) 2 очка.

Решение. *Оценка.* Разрыв меньше двух очков быть не может: при двух командах победитель отличается от проигравшего не менее чем на 2 очка, а при большем числе команд А и Я отличаются как минимум на очко от любой другой команды, причём в разные стороны.

а) *Пример.* Пусть все встречи, кроме одной, закончились вничью. Тогда победитель этой одной встречи набрал на 2 очка больше проигравшего, а остальные расположились между ними.

б) *Пример.* Пусть 9 команд (все, кроме А) выиграли друг у друга по кругу (каждая победила и проиграла по разу), А победила Я, а остальные встречи закончились вничью. Тогда у А 11 очков, у Я — 9 очков, а у остальных — по 10.

Путь к решению. Оценка здесь очевидна, пример в п. а) — тоже, естественно начать с них. Если в п. б) взять тот же пример, то с оценкой он не сойдётся: если А победила Я, а остальные партии — ничейные, то А опередит Я на 3 очка. Что не так: пример не лучший или оценка не точная? Пока не ясно, но *проще менять пример*, поэтому начнём с этого. Заметим, что остальные команды отстают от А на 2 очка. Нельзя ли *подправить пример*, увеличив очки всех команд, кроме А, на 1? Мы уже знаем, что в футбольной системе добавляется одно очко при замене двух ничьих на победу+поражение. Отлично, можно устроить победы по кругу (или сделать три круга длины 3 вместо одного большого)!

Задача 3.5. В однокруговом турнире участвуют восемь шахматистов. Какое наименьшее количество дней может длиться этот турнир, если каждый его участник играет не более одной партии в день и никакие две партии подряд не играет чёрными фигурами?

Ответ: 8 дней.

Решение. *Оценка.* Чтобы каждый участник сыграл 7 партий, нужно не менее семи дней. Предположим, что хватило 7 туров. Тогда шахматисты играют без выходных: каждый день играется по 4 партии, и четыре человека играют чёрными. Всего за 7 дней сыграно $4 \cdot 7 = 28$ партий чёрным цветом. Те четыре участника, кто играл в первый день чёрными, сыграли *не более* четырёх партий чёрными, а остальные — *не более* трёх. Чтобы набралось 28 партий чёрными, эти неравенства должны превратиться в равенства. Это, в частности, означает, что каждый участник строго чередует цвет фигур. Но тогда те, кто в первый день играли одинаковым цветом, всегда играют одинаковым цветом и сыграть между собой не смогут. Противоречие.

Пример. За 8 туров такой турнир провести можно. Пример изображён на рис. а (цвет клетки — это цвет фигур, буквы — игроки, а цифра в клетке — номер тура).

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
А		7	6	5	4	3	2	1
Б	7		5	4	3	2	1	8
В	6	5		3	2	1	8	7
Г	5	4	3		1	8	7	6
Д	4	3	2	1		7	6	5
Е	3	2	1	8	7		5	4
Ж	2	1	8	7	6	5		3
З	1	8	7	6	5	4	3	

Рис. а

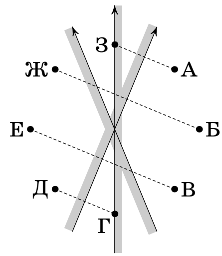


Рис. б

Путь к решению. В условии задачи говорится фактически о *разбиении* на игры чёрными и белыми и о *чередовании* цветов.

Оценка. Предположив, что хватит 7 дней, спросим, *как такое может быть*. Проведя *подсчёт двумя способами* для игр *одним цветом*, мы получим *строгое чередование*, а из него — *противоречие*.

Пример можно найти как продолжение оценки. Предыдущее противоречие подсказывает, что игроки (почти все) должны за счёт дня отдыха сменить чётность дней, когда они играют белыми. Но тогда игрок после дня отдыха должен играть не тем цветом, что перед отдыхом! Таким образом, и здесь получается *строгое чередование* цветов. Заметим ещё, что из-за чётности игроки отдыхают по двое. Чтобы не нарушить баланс цветов, они должны были перед отдыхом играть разными цветами. Дальше уже можно *исследовать малые случаи*: построить табличку для 4 и 6 игроков и, *увидев закономерность*, построить нужную таблицу. А можно *достроить* модель с многоугольником из решения задачи 3.2. Действительно, расставим игроков в вершины правильного восьмиугольника. В каждом туре будем проводить ось симметрии восьмиугольника и сводить в пары игроков из симметричных вершин (те, кто попал на ось, отдыхают). А цвет? Давайте по одну сторону оси всем дадим белый, по другую — чёрный. А чередование? Давайте сделаем ось направленной, будем её поворачивать каждый раз на угол $\dfrac{180^\circ}{8}$ и *чередовать* стороны: белый цвет по очереди будет то справа, то слева от оси. (См. рис. б. На нём есть оси для первых трёх туров, тень оси падает в сторону чёрных. Пары первого тура соединены отрезками.) Тогда, пока игрок остаётся по одну сторону оси, цвет его фигур чередуется. А при проходе оси через игрока — номера туров до и после отдыха одинаковой чётности, но игрок оказался по другую сторону оси, поэтому и цвет его фигур изменился.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.6. В круговом турнире стран Балтии играли 6 футбольных команд (по две от Латвии, Литвы и Эстонии). Все три матча каждого тура проходят одновременно. Есть три судейские бригады — по одной из каждой страны. Можно ли так составить расписание туров и судей, чтобы каждая бригада не судила никакой матч игроков своей страны с соперниками из другой страны?

Задача 3.7. Вася, Петя и Коля сыграли в шахматы несколько кругов. По сумме очков победил Петя, вторым стал Вася, а третьим — Коля. Могло ли быть так, что у Коли было больше всех побед, а у Пети — меньше всех?

Задача 3.8. а) В однокруговом футбольном турнире все команды набрали разное число очков. Может ли быть так, что при начислении очков по системе 2–1–0 все команды также наберут разное число очков, а последовательность мест изменится на противоположную?

б) Может ли так быть в двухкруговом турнире?

в) Может ли так быть, если турнир проводится в несколько кругов?

Задача 3.9. В однокруговом турнире все команды набрали разное число очков (по системе 2–1–0) и каждая хотя бы раз победила. Каково наименьшее возможное число команд?

Задача 3.10. В однокруговом футбольном турнире все участники, кроме победителя, набрали поровну очков. Каков наименьший возможный отрыв победителя?

Задача 3.11. В футбольном турнире участвовали 16 дворовых команд. Встречи шли не по расписанию, а кто с кем договорится. Оказалось, что каждая команда в своём k-м матче забила k голов. Какое наименьшее число ничьих могло быть в турнире?

Ответы и решения

3.6. Ответ: можно.

Решение. Пусть в первом туре в каждом матче сыграют команды-соотечественники и их судят соотечественники. Тогда во всех остальных матчах будут играть команды из разных стран. В таком туре судьи распределяются однозначно. Действительно, для каждой бригады есть матч, в котором не играют соотечественники, и для каждого матча есть бригада из третьей страны, которая его может судить.

Путь к решению. Как может быть устроен тур, который нельзя отсудить? Например, латыши играют между собой, а в двух других матчах литовцы играют с эстонцами. И так как матч между латышами проводить надо, единственный способ избежать неприятности — устроить тур соотечественников.

Запомните приём: *устранив* одно или два очевидных *препятствия*, вы зачастую сделаете дальнейшее построение *однозначным* и сможете довести его до конца.

3.7. Ответ: да.

Решение. Например, пусть игроки сыграли друг с другом по 6 раз; Петя выиграл два раза у Коли; Вася выиграл три раза у Коли; Коля выиграл один раз у Пети и три раза у Васи; остальные партии закончились вничью. Тогда две победы у Пети, 3 — у Васи, 4 — у Коли. При этом Петя набрал 6,5 очков, Вася — 6, Коля — 5,5.

Путь к решению. Как и в решении задачи 3.1, нам удобнее вместо очков следить за разностью побед и поражений. См. таблицу: здесь В означает количество выигрышей, П — поражений, Р — их разность.

	В	Р	П
Петя	1	1	0
Вася	2	0	2
Коля	3	−1	4

Сумма этих разностей равна 0. У Пети разница положительна, значит, есть победа. Мы хотим, чтобы разность была тем больше, тем меньше побед. Жадно поставим всё по минимуму — см. таблицу, — тогда число поражений вычисляется. Присмотревшись, заметим, что так не бывает: у Коли четыре поражения, а у Пети с Васей вместе только три победы. Попытка исправить у кого-то одного не проходит: нарушается условие про победы или про разности (читай, очки). Но можно исправить всех вместе *согласованно*: давайте, не меняя разностей, увеличим у каждого число побед и поражений на 1. Теперь уже у каждого побед не больше, чем поражений у остальных вместе, и наоборот. Так и получается ответ к задаче. Коля и Вася сыграли между собой наибольшее число игр — 6. Значит, сделаем 6 туров.

Запомните приём: *жадный алгоритм* позволяет строить более простые примеры.

3.8. Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Решение. а) Пусть было n команд, первой была команда А, последней — Я. Разница очков соседних команд не менее одного очка, поэтому разница очков между А и Я не менее $n - 1$. У Я не стало больше очков после пересчёта, поэтому А опустится ниже Я, только уменьшив свои очки как минимум на n. Но число очков уменьшается на число побед, а побед у А не больше, чем игр, то есть не больше чем $n - 1$. Значит, настолько опуститься А не может.

б) Усилим предыдущее рассуждение. Команда А должна опуститься на последнее место, то есть по очкам отстать от Я как минимум на $n - 1$. Значит, общий сдвиг команды А по очкам должен быть не менее $2(n - 1)$. Это возможно, если А одержала $2(n - 1)$ победу, то есть выиграла все матчи. Однако, как ни считай, такая команда не может занять последнее место.

в) Пусть, например, три команды А, Б и Я сыграли в десятикруговом турнире. Команда А 5 раз победила Б, 2 раза — Я, 5 раз проиграла Б и 3 раза — Я, а остальные встречи закончились вничью. Тогда до пересчёта у А, Б и Я соответственно 26, 25 и 24 очка, а после пересчёта — 19, 20 и 21 очко.

Путь к решению. Доказательство невозможности в п. а) и б) начинается с вопроса «как такое может быть?», в нашем случае: «на сколько меняется сумма очков?». Поняв, она что меняется на число побед, легко *подсчётом двумя способами* получить *противоречие*. При построении примера удобнее применить *обратный ход*, то есть начать с очков по системе 2–1–0. Тогда, как и в решениях задач 3.1 и 3.7, можно следить за разностью побед и поражений. Ограничимся тремя командами А, Б и Я и будем *строить постепенно*. Начнём с такой же жадной таблицы (см. выше), как в решении задачи 3.7.

	В	Р	П	Очки 2–1–0	Очки 3–1–0
Я	1	1	0	x	$x+1$
Б	2	0	2	$x-1$	$x+1$
А	3	-1	4	$x-2$	$x+1$

Разность убывает с шагом 1, очки в системе 2–1–0 — тоже, поэтому если команда Я получила x очков, то Б и А — соответственно $x-1$ и $x-2$. При переходе на систему 3–1–0 эти очки увеличиваются на число побед, и увы — станут равными. Чтобы получить убывание очков, надо, чтобы число побед возрастало с шагом 2. Сделаем и такую таблицу, сохранив разности (см. ниже). Теперь всё хорошо, кроме того, что команда А победила на 2 раза больше, чем остальные в сумме проиграли. Как и в задаче 3.7, решим эту проблему, увеличив на 2 число побед и поражений каждой команды. Это и даст пример.

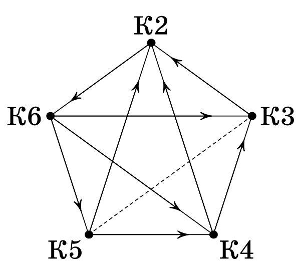
	В	Р	П	Очки 2–1–0	Очки 3–1–0
Я	1	1	0	x	$x+1$
Б	3	0	3	$x-1$	$x+2$
А	5	-1	6	$x-2$	$x+3$

Замечание. Есть пример, где туров меньше, а команд больше: 13 команд, 6 туров.

3.9. Ответ: 5 команд.

Решение. *Оценка.* Если две команды, нет двух побед. Если три команды, три победы возможны только по кругу, тогда очков поровну. Если четыре команды, то у худшей не меньше двух очков, поэтому в сумме не меньше $2+3+4+5=14$ очков. Однако всего матчей 6, значит, очков должно быть 12. Противоречие.

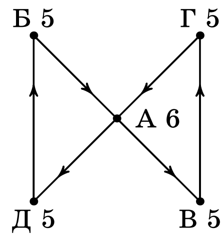
Пример. См. рис.: цифры означают набранные очки, пунктир — ничью, стрелка ведёт от победителя к проигравшему.



Путь к решению. Искушённый ученик, конечно, сразу выпишет неравенство для суммы очков, но мы хотели показать, как может прийти к оценке новичок. Пример строится как продолжение оценки. Спросив «как такое может быть?» для пяти команд, получаем оценку: $2 + 3 + 4 + 5 + 6 \geqslant 5 \cdot 4$. Неравенство превращается в равенство, значит, будут набраны как раз 2, 3, 4, 5 и 6 очков. У команд К3 и К5 по нечётному числу очков, значит, они хотя бы по разу сыграли вничью. Разумно попробовать поставить ничью между ними. У команды К2 есть победа, а К6 потеряла 2 очка. Поставим победу К2 над К6. Теперь мы избавились от *избытка свободы*, все дальнейшие результаты вычисляются. Чтобы набрать нужное число очков, команде К6 надо все остальные матчи выиграть, а команде К2 — проиграть. Теперь у К3 уже 3 очка, значит, остальные матчи К3 проиграла. У команды К4 стало 4 очка, значит, она проиграла матч команде К5.

Замечание. Мы могли избавиться от избытка свободы и другим способом, скажем, поставив победу К3 над К6. Если бы это привело к противоречию, мы могли вернуться к тому месту, где сделали *неудачный выбор*, и, *изменив выбор*, проверить следующий вариант.

3.10. Ответ: одно очко.



Решение. Приведём пример такого турнира для пяти команд А (победитель), Б, В, Г, Д. Пусть команда А победила Д и В, но проиграла Г и Б, Д победила Б, а В победила Г, остальные матчи — ничьи (см. рис.). Тогда у А 6 очков, а у остальных по 5.

Путь к решению. *Строим постепенно.* Начнём с турнира, где все ничьи. Группе игроков можно добавить по очку, организовав для них *выигрыш по кругу*. Сделаем два таких круга, чтобы победитель вошёл в оба, а каждый из остальных — только в один.

Комментарий. В задаче 2.4 было показано, что если при системе 2–1–0 все, кроме победителя, набрали поровну очков, то победитель выиграл все встречи. Поэтому ответ 1 для футбольных турниров оказывается весьма неожиданным!

3.11. Ответ: две ничьих.

Решение. *Оценка.* В первой игре турнира счёт 1 : 1, а в последней — 15 : 15, то есть две ничьи заведомо есть.

Пример. Вот расписание, при котором больше ничьих не будет. Пронумеруем команды по порядку. Сначала первая команда играет со второй (счет 1 : 1), затем вторая — с третьей (2 : 1). Из первых трёх команд не сыграли только первая и третья, и была всего одна ничья. Будем продолжать так: $(m+1)$-я команда К вступает в игру, когда первые m команд уже сыграли все матчи между собой, кроме матча первой с m-й, и при этом была всего одна ничья. К этому моменту первая и m-я команды сыграли уже по $m-2$ игры, а остальные — по $m-1$ игре каждая. Сначала К играет с m-й командой и проигрывает со счётом $(m-1):1$. Затем первая и m-я команды играют между собой со счётом $(m-1):m$. Теперь К играет в любом порядке с командами от второй до $(m-1)$-й (и все игры проигрывает, последнюю со счётом $(m-1):m$). Итак, ситуция повторилась для $m+1$ команд: сыграны все игры, кроме первой с $(m+1)$-й. Теперь в игру вступает $(m+2)$-я команда. Продолжая таким образом, дойдём до ситуации, когда не сыгран будет только матч первой команды с n-й. Сыграв его, закончим турнир второй ничьей.

Путь к решению. Оценка достигается через *принцип крайнего*: а именно, бывает полезно рассмотреть тот элемент условия, которому отвечает наибольшее или наименьшее значение некоторого параметра (в данном случае первый и последний матч). Пример строится *индуктивно*: из примера для m команд мы строим пример для $m+1$ команд.

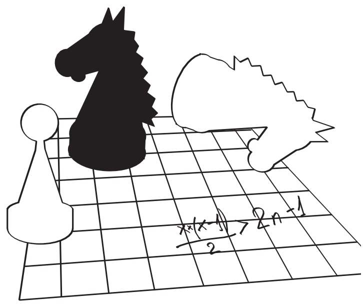
К задачам этого занятия можно добавить какие-либо из дополнительных задач Д16–Д18.

Занятие 4

Алгебра турниров

В задачах этого занятия турниры исследуются алгебраическими методами. Эти задачи целесообразно предлагать школьникам старших классов.

Обучение алгебре состоит не только и не столько в обучении методам решения уравнений и неравенств. Гораздо важнее научить описывать и исследовать ситуацию средствами алгебры, то есть сначала составлять уравнения, неравенства и их системы, затем решать их и, наконец, правильно понимать полученные ответы. Задачи о турнирах, где изначально никаких уравнений нет, дают хорошую возможность для обучения алгебраическому моделированию.



Алгебраические выражения возникают здесь обычно как количество игр, суммы очков всех или группы участников, среднее число очков — соответствующие формулы полезно напомнить. Среди других применяются приёмы: подсчёт по группам и рассмотрение среднего.

Задача 4.1. Среди участников кругового шахматного турнира мальчиков втрое больше, чем девочек. Ничьих не было, а в сумме мальчики набрали столько же очков, сколько и девочки. Кто занял первое место: мальчик или девочка?

Ответ: девочка.

Решение. Пусть в турнире участвовали x девочек и $3x$ мальчиков. Тогда девочки в партиях между собой набрали $\frac{x(x-1)}{2}$ очков, а мальчики $\frac{3x(3x-1)}{2}$. Разница составляет

$\frac{3x(3x-1)}{2} - \frac{x(x-1)}{2} = 4x^2 - x$ очков. По условию мальчики и девочки в сумме набрали поровну. Значит, девочки набрали больше на $4x^2 - x$ очков в партиях между мальчиками и девочками. В этих партиях было всего разыграно $3x^2$ очков, поэтому $3x^2 \geqslant 4x^2 - x$, то есть $x \geqslant x^2$. Но x — натуральное число, и потому $x = 1$ и неравенство обращается в равенство. Значит, в турнире участвовала одна девочка и три мальчика. Девочка набрала не менее $4x^2 - x = 3$ очков, следовательно, она выиграла у всех мальчиков и заняла первое место.

Запомните приём. Если участники турнира естественно разбиваются на группы, бывает полезно произвести *подсчёт по группам*: посчитать отдельно сумму очков в играх внутри каждой группы и в играх между группами. Этот приём встречается и в других задачах, см., например, задачи 4.4, 4.5.

Задача 4.2. В однокруговом турнире участвовало 20 команд. Могло ли оказаться, что каждая из команд выиграла столько же матчей, сколько сыграла вничью?

Ответ: нет.

Решение. Пусть x_i — число побед i-й команды. Тогда число её поражений равно $19 - 2x_i$. Так как суммарное число побед у всех команд равно суммарному числу поражений, то

$$\sum x_i = \sum (19 - 2x_i),$$

то есть $3\sum x_i = 20 \cdot 19$. Но правая часть этого равенства не кратна трём — противоречие.

Замечание. Получить противоречие можно и без алгебры, с помощью такого трюка. Посчитаем очки по системе 2–1–0. Тогда число очков каждой команды равны утроенному числу её ничьих, то есть кратно трём. Однако общая сумма очков равна $20 \cdot 19$ — не кратна трём.

Задача 4.3. Как известно, в любом турнире суммарное количество побед равно суммарному количеству поражений. Докажите, что если не было ничьих, то суммы квадратов этих количеств тоже одинаковы.

Замечание. Отметим, что указанные суммы квадратов тесно связаны с числом циклов[1] длины 3. Подробнее об этом говорится в брошюре А. А. Заславского, Б. Р. Френкина «Математика турниров». М.: МЦНМО. 2009, с. 7–10.

Решение. Пусть в турнире участвовали n игроков, занумерованные числами от 1 до n. Если x_i — количество побед i-го игрока (где $i = 1, \ldots, n$), а y_i — количество его поражений, то $x_i + y_i = n - 1$ (по условию ничьих не было). Тогда

$$\sum_1^n x_i^2 - \sum_1^n y_i^2 = \sum_1^n (x_i + y_i)(x_i - y_i) =$$
$$= (n-1)\sum_1^n (x_i - y_i) = (n-1)\left(\sum_1^n x_i - \sum_1^n y_i\right) = 0,$$

что и требовалось.

Задача 4.4. Какой максимальный разрыв может быть между результатами шахматистов, занявших соседние места в круговом турнире с n участниками?

Ответ: $\frac{n}{2}$.

Решение. *Оценка.* Пусть шахматисты А и Б заняли соседние места, причём А набрал больше очков. Назовём *сильными* игроков, набравших не меньше, чем А, а *слабыми* — набравших не больше, чем Б. Ясно, что разрыв между А и Б не больше, чем разница между средними результатами слабых и сильных. Пусть количество сильных равно k, тогда количество слабых $n - k$. Сильные в матчах между собой набирают $\frac{k(k-1)}{2}$ очков, а слабые $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. Сильные в матчах со слабыми набирают не больше чем $k(n-k)$ очков. Поэтому средний результат сильного не больше $n - k + \frac{k-1}{2}$, а слабого — не меньше $\frac{n-k-1}{2}$. Их разность не больше $\frac{n}{2}$, что и даёт оценку на разрыв между А и Б.

[1] Определение цикла см. перед задачей 5.10.

Пример. Пусть один участник проиграл остальным, а те сыграли между собой вничью. Тогда у последнего 0 очков, у предпоследнего, как и у всех остальных, $\frac{n}{2}$, и разрыв равен $\frac{n}{2}$.

Задача 4.5. В шахматном турнире некоторые из n участников были мастерами, остальные — гроссмейстерами. Оказалось, что каждый участник набрал против мастеров столько же очков, сколько против гроссмейстеров. Докажите, что n — квадрат натурального числа.

Решение. Пусть в турнире участвуют k мастеров и m гроссмейстеров. Мастера во встречах между собой набирают $\frac{k(k-1)}{2}$ очков, значит, во встречах с гроссмейстерами они в сумме набирают столько же. Аналогично гроссмейстеры в сумме набирают против мастеров $\frac{m(m-1)}{2}$ очков. Итак, всего в партиях между гроссмейстерами и мастерами набрано $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}$ очков. Но всего таких партий km, поэтому и сумма равна km. А равенство

$$\frac{m(m-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}=km$$

равносильно равенству $k+m=(k-m)^2$.

Путь к решению. Здесь, как и в задаче 4.1, хорошо работает приём *подсчёт по группам*.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.6. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель выиграл у всех и набрал очков в 5 раз меньше, чем все остальные. Сколько было участников?

Задача 4.7. Могут ли в однокруговом турнире пятнадцати шахматистов какие-то четыре участника набрать в сумме больше очков, чем все остальные вместе?

Задача 4.8. Несколько шахматистов должны были провести турнир в один круг. Два игрока, сыграв поровну партий, выбыли из турнира. В результате состоялось 23 партии. Играли ли выбывшие шахматисты друг с другом?

Задача 4.9. Сыграв однокруговой турнир, все n шахматистов набрали разное число очков. Какова наименьшая возможная разность очков между первым и последним местом?

Задача 4.10. Докажите, что если в однокруговом турнире для любых двух участников найдётся выигравший у обоих, то участников не меньше семи.

Задача 4.11. В каждом туре однокругового турнира все встречи проводились одновременно, каждую встречу судил один арбитр, и каждый арбитр судил в каждом туре. Будем говорить, что игрок и арбитр встретились, если арбитр судил встречу с участием этого игрока. Пусть количество арбитров равно n, а количество игроков $2n$. Докажите, что некоторый игрок встретился более чем с $\sqrt{n-1}$ арбитрами.

Ответы и решения

4.6. Ответ: 12.

Решение. Если количество участников n и победитель выиграл у всех, то он набрал $n-1$ очко. Всего разыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ очков (см. задачу 2.1а)). Значит, $5(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$, откуда следует ответ.

4.7. Ответ: нет.

Решение. Четыре шахматиста в партиях между собой набирают 6 очков. Против остальных 11 игроков они проводят $4 \cdot 11 = 44$ партии и, следовательно, всего набирают не больше $6+44 = 50$ очков. С другой стороны, 11 игроков только в играх между собой набирают $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ очков.

4.8. Ответ: нет, не играли.

Решение. Пусть в турнире участвовали n игроков. Они должны были сыграть $\frac{n(n-1)}{2}$ партий, из них $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партий сыграли друг с другом невыбывшие игроки. По условию $\frac{(n-2)(n-3)}{2} \leqslant 23 \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$, откуда $n = 8$ или 9. В обоих случаях число несостоявшихся партий $\frac{n(n-1)}{2} - 23$ нечётно. Ещё из условия следует, что у выбывших осталось несыграно по одинаковому числу партий. Сумма этих чисел чётна, значит, не равна общему числу несостоявшихся партий. Такое возможно в единственном случае: когда партия между выбывшими учитывается в сумме дважды. Значит, выбывшие между собой не играли.

4.9. Ответ: $\frac{n-1}{2}$ при нечётном n и $\frac{n}{2}$ при чётном.

Решение. Разрыв между соседями минимум пол-очка. Разрыв между первым и последним складывается из $n-1$ разрыва между соседями, поэтому он не меньше $\frac{n-1}{2}$ очков. Пусть он равен $\frac{n-1}{2}$, тогда все разрывы между соседями — по пол-очка. Если у последнего участника x очков, то у первого $x + \frac{n-1}{2}$. Суммируя арифметическую прогрессию, найдем, что у всех вместе $\frac{n}{2}\left(x + x + \frac{n-1}{2}\right)$ очков. С другой стороны, эта сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, $2x = \frac{n-1}{2}$. Но число x — целое или полуцелое, поэтому $2x$ целое, и $n = 2 \cdot 2x + 1$ нечётно. Соответственно, при чётном n разрыв больше $\frac{n-1}{2}$, то есть как минимум $\frac{n}{2}$.

Примеры турниров с минимальными разрывами строятся так. Пусть $n = 2k$ и для каждого $i = 1, \ldots, k$ участник с номером i выигрывает у участников с номерами $i + k, \ldots, n$, а остальные встречи заканчиваются вничью. Тогда разрыв между k-м и $(k+1)$-м участниками равен одному очку, а между любыми другими соседними — пол-очка, и мы получаем искомый турнир. Добавив еще одного участника, закончившего все встречи вничью, получим турнир с минимальным разрывом для $n = 2k + 1$.

В решении этой задачи применён тот же приём, что в задаче 2.8: сведение к ситуации, где ответ более ясен.

4.10. Решение. Пусть у игрока А больше всех очков при подсчёте по шахматной системе. При n участниках он набрал не меньше среднего числа очков, то есть не менее $\frac{n-1}{2}$. По условию, А кому-то проиграл, скажем, игроку Б. По условию, кто-то выиграл и у А, и у Б, скажем, В. По условию, кто-то выиграл и у А, и у В, скажем, Г. При этом Г и Б — разные игроки, так как Г победил В, а Б проиграл В. Таким образом, у А выиграли не менее трёх игроков, поэтому А набрал не больше $(n-1)-3=n-4$ очков. Из неравенства $n-4 \geqslant \frac{n-1}{2}$ следует, что $n \geqslant 7$.

Запомните приём: оценку на число участников или число игр можно получить, вводя или принудительно меняя систему подсчёта очков на шахматную!

Замечание. Эта задача — частный случай задачи Д26.

4.11. Решение. Если каждый игрок встретился не больше чем с $\sqrt{n-1}$ арбитрами, то это верно и для среднего игрока. Но для среднего игрока эта величина равна общему числу N пар встретившихся игроков и арбитров, делённому на число игроков, то есть равна $\frac{N}{2n}$. Среднее число игроков, встреченных одним арбитром, равно $\frac{N}{n}$, то есть вдвое больше. Значит, достаточно доказать, что это число больше $2\sqrt{n-1}$.

Докажем, что это верно не только в среднем, но и для каждого арбитра. В самом деле, пусть арбитр встретился за время турнира ровно с x игроками. В каждом туре он судил пару, составленную из этих игроков. Значит, количество таких пар не меньше, чем количество туров, то есть $\frac{x(x-1)}{2} \geqslant 2n-1$. Поэтому $x^2 > x(x-1) \geqslant 4n-2 > 4n-4$, откуда следует наше утверждение.

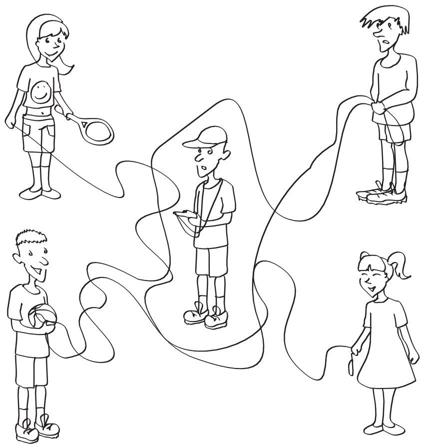
К задачам этого занятия можно добавить какие-либо из дополнительных задач Д19–Д33.

Занятие 5

Турниры, графы и комбинаторика

Задачи этого занятия решаются комбинаторными методами, то есть путём выбора и группировки элементов с нужными свойствами в конечных множествах. В частности, решение некоторых задач основано на принципе Дирихле, о котором уже шла речь в занятии 1 (см. задачу 2.3).

Задачи этого занятия можно использовать и на занятиях по другим темам, например «Графы», «Принцип Дирихле», «Принцип крайнего».



Любой турнир можно представить в виде графа. Напомним, что граф — это совокупность *вершин* и *рёбер*, причём каждое ребро соединяет две вершины. Если каждое ребро превращено в стрелку, то есть указано, какая из двух его вершин является *началом*, а какая *концом*, то граф называется *ориентированным*. В противном случае граф считается *неориентированным*. Чтобы представить турнир в виде графа, будем считать игроков вершинами, а партии между ними — рёбрами. Если в турнире не было ничьих, то его граф можно сделать ориентированным, направив каждое ребро от победителя к проигравшему.

Представление турнира в виде графа полезно в тех случаях, когда помогает сделать условие более наглядным (например, когда речь идет о цепочках и циклах).

Подробнее о графах см., например, брошюру данной серии: В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина «*Графы*». М.: МЦНМО, 2011.

Задача 5.1. Рассмотрим турнир n участников без ничьих. Докажите, что можно занумеровать участников так, что первый выиграл у второго, второй у третьего, ..., $(n-1)$-й у n-го.

Решение. Выберем каких-нибудь двух игроков. Один из них выиграл у другого. Выигравшего обозначим А, а проигравшего Б и образуем цепочку из двух игроков, где А стоит перед Б. Пусть В — какой-то третий игрок. Если он выиграл у А, поставим его в начало цепочки. Если он проиграл А, но выиграл у Б, поставим В между А и Б. Если В проиграл обоим, поставим его после Б. Дальше действуем аналогично: пусть сколько-то игроков уже составляют цепочку с нужным свойством, и пусть игрок И не принадлежит цепочке. Если он выиграл у первого в цепочке, добавим И в начало цепочки. Если нет, найдём последнего игрока в цепочке, который выиграл у И, и поставим И после него. Тогда цепочка по-прежнему будет обладать нужным свойством. Продолжая так, мы включим в цепочку всех игроков.

Замечание. Фактически доказано, что в полном ориентированном графе есть путь по стрелкам, проходящий по разу через каждую вершину.

Утверждение, внешне похожее на задачу 5.1, доказывается совершенно иначе.

Задача 5.2. В круговом турнире с 2^n участниками не было ничьих. Докажите, что можно выбрать и занумеровать $n+1$ участников так, что каждый начиная со второго победил всех участников с меньшими номерами.

Решение. Поскольку в среднем игрок выиграл половину партий, кто-то выиграл не менее половины. Но число партий одного игрока нечётно, значит, какой-то игрок A_{n+1} выиграл более половины партий, то есть не менее 2^{n-1}. Выберем 2^{n-1} игроков из проигравших A_{n+1} и рассмотрим подтурнир только из них. Аналогично найдём в этом подтурнире игрока A_n, выигравшего не менее 2^{n-2} раз, и рассмотрим подтурнир из 2^{n-2} игроков, проигравших A_n. Продолжаем действовать таким образом, пока после n шагов не получится подтурнир из одного игрока, его и обозначим A_1.

Замечание. Фактически доказано, что в полном ориентированном графе с 2^n вершинами есть цепочка из $n+1$ элемента, в которой все стрелки направлены в одну сторону.

Задача 5.3. Шестнадцать команд из шестнадцати стран провели однокруговой турнир. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех этих странах, кроме своей родины?

Ответ: нет.

Решение. Действительно, пусть каждая команда сыграла в пятнадцати странах, но не в своей. Так как команда провела всего 15 матчей, в каждой из этих стран она играла по разу. Тогда в каждой стране играли по разу 15 команд из всех остальных стран. Но в каждом матче участвуют две команды, поэтому в каждой стране играло чётное количество команд — противоречие.

Задача 5.4. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

Решение. Здесь полезно применить *принцип крайнего* (см. задачу 3.11). Предположим, что для некоторых команд утверждение задачи неверно. Тогда среди них найдётся команда А наибольшей численности. Она соревновалась с некоторой командой Б. Все ученики, не вошедшие в команду Б, составляют некоторую команду В. В команду В входят все участники команды А и ещё хотя бы один школьник. Команда В не могла соревноваться с командой Б, так как с этой командой соревновалась команда А. Значит, команда В соревновалась с командой, включавшей не всех остальных учеников класса. Но в команде В больше участников, чем в команде А, что противоречит выбору А.

Задача 5.5. Все участники двухкругового шахматного турнира набрали поровну очков. Докажите, что какие-то двое выиграли одинаковое количество партий белыми. (Каждый участник с каждым сыграл одну партию белыми и одну чёрными.)

Решение. *Как и в предыдущей задаче, здесь надо применить принцип Дирихле.* Пусть в турнире n участников и все они выиграли белыми разное количество партий. Так как выиграть белыми они могли 0, 1, ..., $n-1$ партию (всего n различных вариантов), каждый вариант реализован ровно одним участником. Значит, какой-то игрок А выиграл белыми $n-1$ партию, а какой-то игрок Б — ни одной.

Поскольку каждый участник с каждым сыграл две партии, всего разыграно $n(n-1)$ очков. Если все шахматисты набрали поровну, то результат каждого равен $n-1$. Так как игрок А выиграл все партии белыми, все партии чёрными он проиграл. Тогда Б выиграл у него белыми, но Б ни одной партии белыми не выиграл — получаем нужное противоречие.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.6. Все участники однокругового шахматного турнира набрали одинаковое количество очков. Известно, что если удалить любого участника и аннулировать его результаты, то количество очков у каждого из остальных участников турнира также будет одинаковым. Верно ли, что все партии турнира закончились вничью?

Задача 5.7. Четыре теннисиста решили провести парный турнир так, чтобы любые двое были партнёрами ровно один раз. Докажите, что найдётся либо теннисист, выигравший все встречи, либо теннисист, проигравший все встречи.

Задача 5.8. В однокруговом турнире треть команд хотя бы раз сыграла вничью, а $\frac{3}{4}$ из оставшихся команд хотя бы по разу проиграли. Сколько побед было в турнире?

Задача 5.9. В однокруговом турнире принимали участие n спортсменов, имевших номера от 1 до n. Участник с номером 1 сделал одну ничью, участник с номером 2 сделал две ничьих, ..., участник с номером $n-1$ сделал $n-1$ ничью. Сколько ничьих сделал участник с номером n?

Множество из более чем двух участников турнира называется *циклом*, если их можно занумеровать так, что первый игрок победил второго, второй победил третьего, ..., последний победил первого.

Задача 5.10. В однокруговом турнире участвовали 12 теннисистов, никто не проиграл все встречи. Докажите, что найдётся цикл длины 3. (Напомним, что ничьих в теннисе не бывает!)

Задача 5.11. Докажите, что в турнире без ничьих либо существует цикл, включающий всех участников, либо можно разбить участников на две группы так, что любой игрок из первой группы победил любого из второй.

Ответы и решения

5.6. Ответ: да, верно.

Решение. Удалим какого-то участника А. Тогда из результатов каждого другого участника вычитается одна и та же величина. Значит, А сыграл одинаково со всеми остальными. Но если он у всех выиграл, то остальные набрали меньше очков, а если всем проиграл — больше. Значит, А сыграл со всеми вничью, и это рассуждение верно для любого участника.

5.7. Решение. После двух встреч всегда есть один игрок, одержавший две победы, и один, потерпевший два поражения. В последней игре они будут партнерами, и один из них окажется искомым игроком.

5.8. Ответ: 14.

Решение. Из условия следует, что $\frac{2}{3}$ команд не имели ничьих, а четверть из них, то есть $\frac{1}{6}$ всех команд, не имели ни ничьих, ни поражений. Но команд, имеющих только победы, может быть не более одной. Следовательно, в турнире играли 6 команд, из которых ничьи были только у двух. Значит, во встрече этих двух команд была зафиксирована единственная ничья, а в остальных 14 встречах были победы.

5.9. Ответ: $\left[\frac{n}{2}\right]$ ничьих (квадратные скобки обозначают *целую часть* числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее данного).

Решение. Участник с номером $n-1$ сыграл вничью со всеми остальными спортсменами. Так как первый сделал лишь одну ничью, он не сыграл вничью ни с кем, кроме $(n-1)$-го. Участник $n-2$ не сделал ничью лишь с одним спортсменом, и по доказанному это первый. Значит, второй сыграл вничью и с $(n-1)$-м, и с $(n-2)$-м (если только второй не совпадает с одним из них, то есть если $n > 4$; случай малых n легко разбирается, и ответ будет аналогичным). Так как у второго участника всего 2 ничьи, больше он ни с кем не сыграл вничью. Из сказанного видно, что $(n-1)$-й и $(n-2)$-й участники сделали ничью с n-м, а второй не сделал. Продолжая в том же духе, получаем, что при $i \leqslant \frac{n-1}{2}$ участник i сыграл вничью с участниками $n-1$, ..., $n-i$ (не считая себя), а участник $n-i$ сыграл вничью с участниками от i до n (не считая себя). Этим решена задача для нечётного n: с n-м участником сделали ничьи $\frac{n-1}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$ спортсменов. При чётном n осталось рассмотреть участника $\frac{n}{2}$. В силу сказанного выше меньшие номера не сделали с ним ничьих. Всего он сделал $\frac{n}{2}$ ничьих, значит, он сыграл вничью со всеми последующими участниками, включая n. Это означает, что участник n сделал $\frac{n}{2} = \left[\frac{n}{2}\right]$ ничьих.

5.10. Решение. Выберем произвольного игрока. Согласно условию задачи он выиграл у некоторого игрока, тот выиграл у другого игрока и т. д. Так как теннисистов не бесконечно много (число 12 особой роли тут не играет), рано или поздно цепочка замкнётся на каком-то игроке. Если в полученном цикле три игрока, то задача решена. Пусть в цикле больше трёх теннисистов. Выберем трёх последовательных участников цикла и обозначим их А, Б, В (А выиграл у Б, а Б выиграл у В). Если В выиграл у А, то искомый цикл найден. Если же А выиграл у В, то удалим Б из цикла. В новом цикле на одного игрока меньше, но по-прежнему каждый участник выиграл у следующего. Продолжая аналогично, получим нужный цикл.

5.11. Решение. Рассмотрим цикл наибольшей длины. Пусть в цикле найдутся такие участники Г и Д, что А проиграл Г, но выиграл у Д. Выделим в цикле цепочку от Г до Д. Пусть В — самый первый игрок в цепочке, у которого А выиграл (В $\neq$ Г, но, возможно, В $=$ Д). Тогда А проиграл участнику Б, стоящему в цепочке перед В (возможно, Б $=$ Г). Вставив А между Б и В, мы увеличим длину цикла. Это противоречит его выбору.

Таким образом, каждый участник, не принадлежащий максимальному циклу, либо выиграл у всех его участников, либо всем проиграл. Если все участники цикла выиграли у всех остальных или, наоборот, проиграли всем остальным, то искомое разбиение очевидно: в одну группу входят участники цикла, в другую — все остальные.

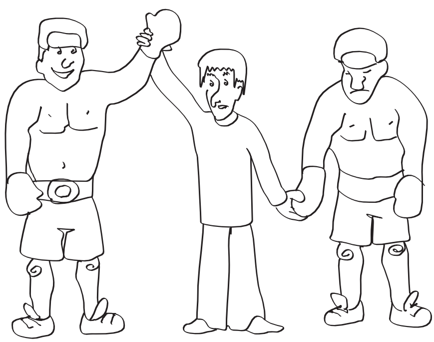
В противном случае пусть в одну группу входят те, кто выиграл у всех участников цикла, в другую — участники цикла и те, кто им проиграл. Теперь достаточно доказать, что если игрок Г выиграл у всех участников цикла, а Д всем им проиграл, то Г выиграл у Д. Но если Д выиграл у Г, то их можно вставить между любыми двумя соседними игроками в цикле (сначала Д, потом Г), а это противоречит его максимальности.

К задачам этого занятия можно добавить какие-либо из дополнительных задач Д34–Д47, Д53.

Занятие 6

Проигравший вылетает

Напомним, что при *кубковой*, *или олимпийской системе* турнир состоит из нескольких туров, в каждом из которых участники проводят по одной встрече и проигравший «вылетает» (если в туре участвует нечётное число спортсменов, то один из них по жребию «отдыхает» и выходит в следующий тур).



Задача 6.1. Турнир по боксу проходил по олимпийской системе, «отдыхающих» не было. При этом 32 человека выиграли боёв больше, чем проиграли. Сколько боксёров участвовало в турнире?

Ответ: 128.

Решение. Каждый, кроме победителя, проиграл один бой. Поэтому, чтобы побед было больше, чем поражений, их должно быть хотя бы две (ясно, что и у победителя не меньше двух побед). Тем самым, 32 боксёра и только они выиграли первые два боя. Но после первых двух боёв остается четверть участников. Следовательно, в турнире участвовало 128 боксеров.

Задача 6.2. а) В розыгрыше кубка участвовали $n > 2$ спортсменов. Арбитр Иванов, судивший финал, не судил больше ни одной встречи. Докажите, что найдётся ещё хотя бы один арбитр, также судивший лишь одну встречу.

б) Докажите, что если количество участников чётно, то кроме Иванова найдутся ещё хотя бы два арбитра, судившие лишь одну встречу.

Решение. а) Первый тур судили $\left[\frac{n}{2}\right]$ арбитров (квадратные скобки означают целую часть числа). Если утверждение задачи неверно, то эти арбитры судили в общей сложности не менее $2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \geqslant n - 1$ встреч. Вместе с финалом это составляет не менее n встреч. Но этого не может быть, так как общее количество встреч в розыгрыше кубка равно $n - 1$. (Количество встреч равно количеству выбывших игроков, а выбывают все, кроме одного — см. задачу 2.11.)

б) Пусть n чётно и все арбитры, кроме, быть может, двух, судили хотя бы по две встречи. Как отмечено в решении п. а), встречи первого тура судили $\left[\frac{n}{2}\right]$ арбитров. В данном случае $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$. Значит, эти арбитры судили не менее чем

$$2 \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1 = n - 1$$

встреч, то есть все встречи турнира. Но был ещё арбитр финала, не судивший встреч первого тура, — противоречие!

Задача 6.3. В турнире участвуют 64 боксёра разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Можно ли за 70 боёв выявить двух сильнейших?

Ответ: можно.

Решение. Устроим сначала турнир по олимпийской системе. Чтобы выбыли 63 человека, понадобится 63 боя. При этом победитель проведёт шесть боёв и победит шесть боксёров. Второй по силе боксёр — среди них, так как никому другому он проиграть не мог. Для выявления второго достаточно организовать турнир по олимпийской системе среди этой шестерки. Чтобы выбыли пять боксёров, потребуются пять боёв. Итого $63 + 5 = 68$ боёв.

Задача 6.4. Ваня, Коля и Петя играли в теннис «на высадку», то есть в каждой партии двое играют, а третий ждёт и в следующей партии заменяет проигравшего (ничьих в теннисе не бывает). В итоге оказалось, что Ваня сыграл 12 партий, а Коля 25 партий. Сколько партий Коля отдыхал?

Ответ: ни одной.

Решение. Так как Коля играл с Ваней не больше 12 раз, с Петей он играл не меньше 13 раз. С другой стороны, Коля с Петей не могли играть два раза подряд, их партии чередовались с одной или несколькими подряд партиями Вани. Значит, партий Коли с Петей не больше 13 (иначе промежутков, а значит, и партий Вани больше 12). Поэтому партий Коли с Петей ровно 13, а с Ваней $25 - 13 = 12$. Значит, Ваня с Петей не играл ни одной партии, то есть Коля не отдыхал.

Задача 6.5. Двое играют в шахматы, а ещё шестеро желающих образуют очередь. Проигравший партию становится в конец очереди; тот, чья очередь подошла, играет с победителем, и так далее (в случае ничьей победителя определяют по жребию). Могут ли к некоторому моменту каждые двое сыграть между собой ровно один раз?

Ответ: нет.

Решение. Допустим, каждый с каждым сыграл по разу. Тогда случилось $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ партий. Так как всего побед и поражений поровну, у некоторого игрока И поражений не больше, чем побед. Он играл 7 раз, значит, проиграл не более 3 раз. После каждого поражения И, стоя в очереди, пропускает не более пяти партий и ещё не более пяти партий пропускает в ожидании самой первой игры. Итого И пропустил не более 20 партий, значит, играл не менее восьми раз. Противоречие.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.6. а) Пятнадцать боксеров провели турнир по олимпийской системе. В первый день состоялось 5 боёв, во второй 6, а в третий день определился единоличный победитель. Сколько боёв состоялось в третий день?

б) Пятнадцать борцов провели турнир с выбыванием после третьего поражения. В первый день состоялось 15 поединков, во второй — 16, а в третий день единственный невыбывший был объявлен победителем. Сколько поединков состоялось в третий день, если ничьих не было, а победитель потерпел всего одно поражение?

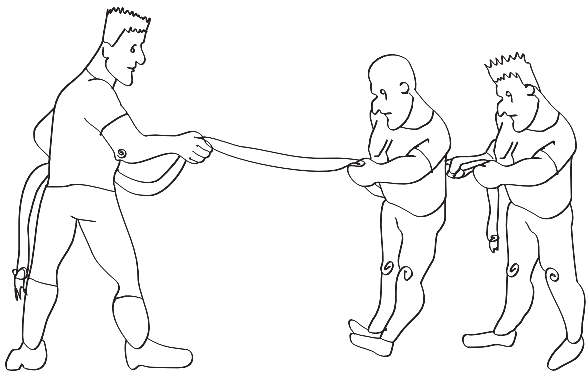
Задача 6.7. В однокруговом чемпионате участвовали 16 команд, и все показали разный результат. Затем среди них был разыгран кубок. Каждую встречу выигрывала команда, занявшая более высокое место в чемпионате. Назовём встречу в розыгрыше кубка неинтересной, если разница мест команд в чемпионате была больше четырёх. Каково наименьшее возможное число неинтересных встреч?

Задача 6.8. Боря, Лёша и Саша играли в шахматы «навылет» (проигравший уступает своё место, при ничьей сменяется игравший белыми). Оставшийся играет в следующей партии фигурами другого цвета. В первой партии Боря играл белыми с Лёшей. Каким цветом играл Лёша с Сашей в последней партии?

Задача 6.9. В турнире по системе «проигравший выбывает» участвовали 55 боксёров. Никакие два боя не проходили одновременно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боёв мог провести победитель турнира?

Задача 6.10. Группа школьников играла в пинг-понг «на победителя». Они установили очередь, вначале играли первый и второй из очереди, а в дальнейшем каждый очередной участник играл с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова сыграли по тем же правилам, но очередь выстроилась в обратном порядке (последний вчера стал первым сегодня, и т. д.). Известно, что каждый сыграл хотя бы раз и в первый, и во второй день. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.

Задача 6.11. В команде 8 силачей разной силы. Тренер может ставить на концы каната любые группы из одного или нескольких силачей. Он хочет выяснить, правда ли, что при перетягивании каната любые двое победят любого одного. Как ему гарантированно проверить это а) за 19 перетягиваний; б) за 13 перетягиваний?



Ответы и решения

6.6. Решение. а) Выбыло 14 боксёров, значит, было 14 боёв. Поэтому в третий день прошло $14 - 5 - 6 = 3$ боя.

б) Каждый из четырнадцати выбывших потерпел 3 поражения, а победитель — одно. Итого $3 \cdot 14 + 1 = 43$ поражения. Значит, было всего 43 поединка, из них в третий день $43 - 15 - 16 = 12$ поединков.

6.7. Ответ: одна.

Решение. *Оценка.* Предположим, что неинтересных встреч не было. Будем обозначать каждую команду тем местом, которое она заняла в чемпионате. Тогда кубок выиграла команда 1. В розыгрыше кубка она сыграла (в каком-то порядке) с командами 2, 3, 4, 5. Одна из этих команд успела выиграть у трёх команд, другая у двух, третья у одной, четвёртая проиграла первый же матч команде 1. Итого было 6 команд, проигравших какой-либо из команд 2, 3, 4, 5. Но это могли быть только команды 6, 7, 8, 9, то есть всего четыре команды — противоречие.

Пример с одной неинтересной встречей: пусть каждая из команд, занявших в чемпионате нечётные места, встречается в первом туре с командой, занявшей следующее место. Во втором туре команды 1, 5, 9, 13 встречаются соответственно с 3, 7, 11, 15. В третьем туре команда 1 играет с 5, а 9 с 13. Наконец, в финале играют команды 1 и 9 (неинтересная встреча).

6.8. Ответ: Лёша играл белыми.

Решение. Возможны только партии Боря–Лёша, Лёша–Саша и Саша–Боря (первым пишем играющего белыми). Действительно, если в партии Боря–Лёша выиграет Боря, то в следующей он будет играть с Сашей чёрными. Иначе с Сашей будет играть Лёша белыми. Точно так же проверяется, что после Лёша–Саша могут быть только игры Саша–Боря или Боря–Лёша, а после Саша–Боря — только Боря–Лёша или Лёша–Саша.

6.9. Ответ: 8 боёв.

Решение. Обозначим через u_k число Фибоначчи номер k ($u_1 = u_2 = 1$, $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ при $k \geqslant 2$). Докажем по индукции, что а) если победитель провёл не меньше n боёв, то число участников не меньше u_{n+2}; б) существует турнир с u_{n+2} участниками, победитель которого провёл n боёв.

База ($n = 1$, $u_3 = 2$) очевидна.

Шаг индукции. а) Пусть победитель А выиграл последний бой у боксёра Б. Оставшиеся поединки фактически распадаются на два турнира: один из них выиграл А, а второй — Б. В первом турнире победитель А провёл не меньше $n - 1$ боя, значит, число участников не меньше u_{n+1}. Во втором турнире победитель Б провёл не меньше $n - 2$ боёв, значит, число участников не меньше u_n. А в исходном турнире число участников не меньше $u_{n+1} + u_n = u_{n+2}$.

б) Достаточно свести в заключительном поединке победителя турнира с u_{n+1} участниками (выигравшего $n-1$ бой) и победителя турнира с u_n участниками (выигравшего $n-2$ боя). Поскольку $55 = u_{10}$, отсюда следует ответ.

6.10. Решение. Пусть А — последний в очереди в первый день. Свою первую партию он сыграл с игроком Б. Тогда Б либо предпоследний, либо выиграл у всех, кто стоял в очереди между ним и А. Тем самым, Б сыграл со всеми, кто стоял позже него в очереди. На следующий день все они окажутся впереди Б, и первую свою партию Б сыграет с кем-то из них.

6.11. Решение. Достаточно выявить двоих самых слабых и одного самого сильного и сравнить.

а) Чтобы выявить самого слабого или самого сильного из n силачей, достаточно $n-1$ перетягивания. Выявим, например, самого слабого: сравним двоих, затем более слабого — с третьим, затем более слабого из них — с четвёртым и т. д. За 7 перетягиваний выявим из восьми самого слабого, затем за 6 — самого слабого из оставшихся, затем за 5 — самого сильного из оставшихся. Последним перетягиванием сравним двоих слабых с сильным.

б) Разобьём силачей на 8 пар и сравним в парах; слабых поставим в один угол, сильных — в другой. Разобьём четырёх слабых на 2 пары и сравним; наконец, сравним более слабых из этих пар. За 7 сравнений нашли самого слабого силача; кроме того, самый слабый из оставшихся — это один из трёх, сравнивавшихся с ним. Выявим его за два сравнения. Самый сильный — один из четырёх силачей в другом углу: выявим его за 3 сравнения. Итого $7+2+3 = 12$ сравнений, плюс одно сравнение двух слабых с сильным.

К задачам этого занятия можно добавить какие-либо из дополнительных задач Д48–Д52, Д54.

Дополнительные задачи

Здесь собраны задачи, которые можно добавлять к предыдущему материалу. (В конце каждого занятия даны соответствующие рекомендации. См. также указатель по темам на стр. 102–103.)

Задача Д1. В однокруговом турнире восьми шахматистов все набрали разное количество очков. Участник, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько участники, занявшие места с пятое по восьмое вместе. Как закончилась партия между участниками, занявшими третье и пятое места?

Задача Д2. Четыре дворовые команды провели однокруговой турнир по хоккею. Порядок встреч был случайный. Каждая команда забила 1 гол в своей первой игре, 2 гола — во второй и 3 гола — в третьей. Было всего две ничьи, побед не было только у одной команды, и все набрали разное число очков (по системе 2–1–0). Восстановите результаты всех матчей.

Задача Д3. В однокруговом турнире по футболу были зафиксированы следующие результаты:

Команда	Сыграно	Победы	Ничьи	Поражения	Мячи
Шотландия	3	3	0	0	7 : 1
Уэльс	3	1	1	1	3 : 3
Англия	3	1	1	1	2 : 3
Ирландия	3	0	0	3	1 : 6

Игра Шотландия — Англия закончилась со счётом 3 : 0. Как закончились остальные матчи?

Задача Д4. В газете напечатана промежуточная таблица турнира:

Команда	Победы	Ничьи	Поражения	Мячи
А	2	0	0	4 : 1
Б	1	1	0	1 : 1
В	0	2	0	3 : 3
Г	0	1	2	3 : 5
Д	0	0	1	0 : 2

Известно, что в таблице не больше одной опечатки. Восстановите результаты сыгранных матчей.

Задача Д5. Четыре футбольные команды играли «навылет» (проигравшая команда садится отдыхать, в случае ничьей — садятся обе команды). Известно, что команды А и Б (игравшие первый матч) сыграли по 3 раза, команда В (следующая по очереди) — также 3 раза, а команда Г — 7 раз. Восстановите исход как можно большего количества матчей.

Задача Д6. Пять шахматистов провели однокруговой турнир, в котором все набрали разное количество очков. При этом шахматист, занявший первое место, не имел ничьих, занявший второе — поражений и только один участник не имел побед. Восстановите результаты турнира.

Задача Д7. Пять футбольных команд провели турнир, в котором каждая команда сыграла с каждой по разу. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. Сколько очков набрала пятая команда?

Задача Д8. В групповом турнире чемпионата Европы по футболу (4 команды, выигрыш — 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0) чистое второе место заняла команда, набравшая 3 очка. Восстановите результаты всех матчей.

Задача Д9. а) От однокругового футбольного турнира трёх команд осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Есть ли такая таблица, из которой ясно, что в турнире не было ничьих?

б) То же, но команд не менее четырёх.

Задача Д10. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Начислялось 1 очко за ничью и 0 — за поражение. Сколько очков начислялось за победу, если известно, что это число — целое?

Задача Д11. Две команды разыграли первенство по десяти видам спорта. За победу в каждом из видов начислялось четыре очка, за ничью — два очка и за поражение — одно. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?

Задача Д12. Турнир прошел в несколько кругов. Участник A все встречи сыграл вничью. Докажите, что

а) как при подсчёте очков по шахматной системе, так и при подсчёте по системе 2–1–0 игрок A наберет среднее арифметическое результатов всех игроков,

б) если кто-то набрал очков больше, чем участник A, то кто-то другой набрал меньше, чем участник A,

в) если есть два участника с различным числом очков, то победитель турнира набрал больше, чем участник A.

Задача Д13. В футбольном турнире пяти команд победитель набрал половину всех очков, набранных командами. Сколько ничьих было в этом турнире?

Задача Д14. В однокруговом турнире участвовало чётное число команд. Первая и вторая команды набрали поровну, третья и четвёртая — меньше, но тоже поровну, и т. д.: каждая следующая пара набирала меньше предыдущей, но поровну между собой. В каждой паре выше поставили команду, имевшую больше побед. Если бы использовали другой дополнительный показатель — результат личной встречи, то вторая команда оказалась бы выше первой, четвёртая выше третьей и т. д. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире, если система начисления очков: а) 2–1–0; б) 3–1–0?

Задача Д15. В однокруговом футбольном турнире участвовало n команд. Чистое второе место заняла команда, набравшая $n-1$ очко. Докажите, что такое возможно при любом $n > 2$.

Задача Д16. Вилли, Билли, Бим и Бом играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одному разу. Известно, что Вилли набрал $\frac{1}{2}$ очка и 4 партии закончились вничью. Билли говорит, что он за турнир набрал 2,5 очка. Могут ли его слова быть правдой?

Задача Д17. В однокруговом футбольном турнире участвовало не менее трёх команд. После окончания турнира одну из команд дисквалифицировали, а очки, набранные остальными командами в играх с ней, аннулировали.

а) Могла ли команда, занимавшая до дисквалификации чистое первое место, оказаться на чистом последнем?

б) Могла ли команда, занимавшая чистое последнее место, оказаться на чистом первом?

Задача Д18. В многокруговом турнире участвовало шесть шахматистов. В каждом туре их разбивали на три пары так, чтобы ни в какой паре шахматисты до этого не встречались ни в каком туре. Могло ли оказаться, что четвёртый тур провести нельзя[2]?

Задача Д19. В однокруговом шахматном турнире было три неудачника, каждый из которых набрал меньше очков, чем любой из остальных участников. Каждый из остальных половину своих очков набрал во встречах с неудачниками. Сколько шахматистов могло участвовать в турнире?

Задача Д20. В коммерческом однокруговом турнире по футболу (по системе 3–1–0) участвовало пять команд. В связи с финансовыми трудностями некоторые игры были отменены. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков, причём ненулевое. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно?

---

[2]Такая схема применяется, в частности, при проведении турниров по *швейцарской системе*. При этом разбиение на пары производится не случайно, а с учётом очков, набранных шахматистом к началу следующего тура.

Задача Д21. В однокруговом турнире участвовали 22 спортсмена. Очки начислялись по шахматной системе. Затем были дисквалифицированы некоторые участники и аннулированы результаты игр с ними. Все оставшиеся участники до этого имели разные результаты и теперь имеют разные, но последовательность их мест изменилась на противоположную. Докажите, что дисквалифицировано не менее половины участников.

Задача Д22. В шахматном турнире в один круг было 12 участников. По итогам турнира оказалось, что число участников, набравших не более четырёх очков, равно девяти. Петя набрал ровно 9 очков. Как он сыграл со всеми остальными шахматистами?

Задача Д23. В однокруговом турнире по хоккею участвовало несколько команд. В ходе турнира ровно половина команд была дисквалифицирована и выбыла из турнира. В результате было сыграно 77 матчей. Оказалось, что все дисквалифицированные команды сыграли одинаковое число матчей; кроме того, они успели сыграть и все положенные матчи между собой. Сколько команд было в турнире первоначально?

Задача Д24. В соревнованиях участвуют десять фигуристов. Соревнования судят трое судей следующим способом: каждый судья по-своему распределяет между фигуристами места (с первого по десятое), после чего победителем считается фигурист с наименьшей суммой мест. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма у победителя (победитель единственный)?

Задача Д25. В школьном турнире по настольному теннису каждый игрок встречался с каждым один раз и в каждом туре проводил по одной встрече. Во всех турах были одни и те же судьи (по одному на встречу). Так как в школе хватило инвентаря лишь на часть игроков, большинство судей принесли из дому по шарику для пинг-понга, а остальные по ракетке. В каждом туре использовался ровно один шарик из принесённых судьями, и все эти шарики были использованы одинаковое количество раз. То же верно и для ракеток. Найдите количество игроков.

Задача Д26. (Обобщение задачи 4.10.) Пусть k — натуральное число, меньшее чем количество участников турнира. Докажите, что если для любых k игроков найдется выигравший у всех, то всего игроков не меньше $2^{k+1} - 1$.

Задача Д27. Пять теннисистов провели парный турнир, в котором каждая пара играла против каждой один раз. Теннисист А проиграл двенадцать раз, а теннисист Б — шесть раз. Сколько у кого выигрышей?

Задача Д28. В футбольном турнире участвуют десять команд. Каждый день одновременно играется пять матчей. Через какое наименьшее число дней может определиться победитель турнира?

Задача Д29. Футбольный чемпионат России разыгрывают 16 команд в два круга. Какой наибольший разрыв в набранных очках может быть между лидером и следующей за ним командой после первого круга?

Задача Д30. В однокруговом футбольном турнире участвовало n команд, и чистое второе место заняла команда, набравшая $n - 1$ очко. Оказалось, что этого достаточно, чтобы однозначно восстановить результаты всех матчей. Найдите все возможные значения n.

Задача Д31. Команды провели турнир по футболу в один круг. Оказалось, что у единоличного победителя количество побед меньше, чем количество поражений. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

Задача Д32. Чётное число команд сыграли футбольный турнир в два круга. Сумма очков двух первых команд вдвое меньше суммы очков всех остальных команд. Каково наибольшее возможное число команд?

Задача Д33. В однокруговом шахматном турнире без ничьих каждый игрок набрал столько же очков, сколько все побеждённые им в сумме. Сколько могло быть участников?

Задача Д34. Пять участников турнира играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одному разу. Половина партий закончилась вничью. Игрок, занявший последнее место, проиграл все партии. Какое место занял игрок, получивший 3 очка?

Задача Д35. Тридцать три богатыря устроили соревнование по борьбе. Каждый боролся с каждым один раз. Победа давала 1 очко, поражение — 0, ничьих не было. Один богатырь выступил странно. Он победил всех, кто в итоге набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше, чем он. Равного с ним количества очков не набрал никто. Докажите, что странный богатырь занял место не выше тринадцатого и не ниже двадцать первого.

Задача Д36. От таблицы результатов однокругового футбольного турнира десяти команд осталось только суммарное количество забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Математику этого хватило, чтобы восстановить счёт в каждом матче. Какое наименьшее количество из этих двадцати чисел могло быть нулями?

Задача Д37. В каждом туре однокругового турнира команды разбивались на пары так, чтобы команд, свободных от игры, было не больше одной. Команд, сыгравших чётное число игр, перед очередным туром было 7, и после этого тура — тоже 7. Сколько команд могло участвовать в турнире?

Задача Д38. После нескольких игровых дней однокругового командного турнира выяснилось, что любые 5 команд можно так расположить по кругу, что каждая команда сыграла с обеими соседними. Докажите, что турнир можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).

Задача Д39. В однокруговом шахматном турнире единоличным победителем стал Иванов. Петров утверждает, что если удалить любого участника и аннулировать очки, набранные во встречах с ним, то единоличным победителем окажется не Иванов, а кто-то другой. Могут ли слова Петрова быть правдой?

Задача Д40. В однокруговом шахматном турнире все набрали разное число очков. Единоличным чемпионом стал Иванов. Затем за подсказки от компьютера был дисквалифицирован Петров, и единоличным чемпионом стал Сидоров. Петров утверждает, что если бы дисквалифицировали не его, а Сидорова, то он (Петров) был бы единоличным чемпионом. Могут ли слова Петрова быть правдой?

Задача Д41. В турнире каждый участник встретился с каждым один раз. Каждую встречу судил один арбитр. Все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибся?

Задача Д42. Через некоторое время после начала футбольного турнира пяти команд оказалось, что у всех команд разное ненулевое число очков. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно?

Задача Д43. В однокруговом футбольном турнире участвовало n команд ($n \geqslant 5$). Все команды набрали одинаковое количество очков. Докажите, что найдутся хотя бы три команды, имеющие одинаковое количество побед.

Задача Д44. По итогам однокругового футбольного турнира все команды набрали разное число очков. Известно, что n команд не одержало ни одной победы. Каково наименьшее возможное количество участников турнира?

Задача Д45. а) В двухкруговом футбольном турнире участвовало $n \geqslant 2$ команд. При подсчёте очков сотрудник оргкомитета ошибся и за ничью давал не 1, а 2 очка. Та команда, которая при правильном подсчёте набирала больше всех очков и становилась чемпионом, вследствие его ошибки набрала меньше всех очков и заняла последнее место. При каких n такое возможно?

б) Тот же вопрос для однокругового турнира.

Задача Д46. В однокруговом отборочном турнире по футболу играют 5 команд. Последние 2 места вылетают (место тем выше, чем больше очков, при равенстве очков — жребий). При каком наименьшем числе очков команда наверняка не вылетит?

Задача Д47. а) От однокругового футбольного турнира шести команд осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей: 17–17, 2–6, 3–5, 4–4, 5–3, 6–2. Докажите, что в турнире было не менее семи ничьих.

б) От футбольного турнира 18 команд в один круг осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей: 18–18, 17–1, 16–2, 15–3, ..., 1–17. Докажите, что была хотя бы одна ничья.

Задача Д48. а) В теннисном турнире участвуют 64 спортсмена из семи стран: 10 от страны-организатора и по 9 от остальных. Турнир проводится по олимпийской системе, в 6 туров. Организаторы могут сводить спортсменов в пары как угодно. Какое наибольшее число туров они смогут гарантированно (независимо от исходов матчей) провести без встреч между спортсменами одной страны?

б) То же для 300 спортсменов, из каждой страны не более десяти спортсменов.

Задача Д49. Трое играют в теннис, причём игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге Никанор сыграл 10 партий, Филимон — 15, а Агафон — 17. Кто проиграл во второй партии?

Задача Д50. В турнире по олимпийской системе играли 512 человек. Каждому присвоен квалификационный номер — от 1 до 512. Игру назовем интересной, если разность номеров участников не больше 30. Могли ли все игры турнира быть интересными?

Задача Д51. В турнире по олимпийской системе играли 256 человек. Каждому присвоен квалификационный номер — от 1 до 256. В каждой партии турнира разность номеров участников была не больше 20. Докажите, что участник с номером 1 одержал не более двух побед.

Задача Д52. На турнир в Гамбурге собрались 52 борца. Известно, что силы у всех различны и в поединке более сильный всегда побеждает более слабого, за одним исключением: самый слабый является неудобным соперником для самого сильного и всегда его побеждает. Реальные силы борцов организаторам неизвестны. Могут ли организаторы выявить самого сильного борца не более чем за 64 поединка?

Задача Д53. В каждой передаче «Своя игра» участвуют 3 знатока. В прошлом году для проведения цикла передач отобрали n участников. Удалось провести игры так, что каждый участник встретился с каждым ровно в одной игре. В этом году отобрали $3n$ участников. Докажите, что можно провести игры так, чтобы каждый участник встретился с каждым ровно в одной игре.

Задача Д54. Восемь шахматистов сыграли однокруговой турнир. Начислялось 1 очко за победу, 0,5 очка за ничью, 0 за поражение. После этого они же разыграли кубок по олимпийской системе: разбились на пары, проигравшие выбыли и т. д. Все кубковые встречи закончились так же, как встречи тех же игроков в турнире, ничьих не было. Могло ли случиться, что кубок выиграл шахматист, набравший в турнире меньше всех очков?

Ответы, указания, решения к дополнительным задачам

Д1. Ответ: третий выигрывает у пятого.

Четыре последних участника в играх между собой набирают шесть очков, а два первых в сумме не больше тринадцати. Так как первый участник набрал больше второго, четыре последних не могут набрать в сумме больше шести очков, значит, они проигрывают всем остальным, откуда следует ответ.

Д2. Ответ:

	А	Б	В	Г
А		1 : 1	3 : 2	2 : 1
Б	1 : 1		2 : 1	3 : 3
В	2 : 3	1 : 2		3 : 2
Г	1 : 2	3 : 3	2 : 3	

Обозначим команды А, Б, В, Г в порядке убывания результатов. Самая первая встреча закончилась со счётом 1 : 1, а самая последняя — со счётом 3 : 3, значит, больше ничьих нет. Свою первую встречу команда А не выиграла, значит, она набрала не более пяти очков. Свою последнюю встречу команда Г не проиграла, значит, она набрала не менее одного очка. Всего было шесть встреч, в каждой разыграно в сумме два очка, итого сумма очков равна двенадцати. Если у команды Г не менее двух очков, то у В не менее трёх, у Б не менее четырёх, у А не менее пяти, что в сумме даст больше двенадцати очков. Аналогично, если у А не более четырёх очков, то у Б не более трёх и т. д., и в сумме выйдет меньше двенадцати очков. Значит, у команды А — пять очков, у Г — одно, тогда у Б и В в сумме шесть, и это может быть только четыре и два соответственно.

Как эти очки набраны? Глядя на чётность числа очков, понимаем, что А и Г по разу сыграли вничью с какой-то другой командой. Но если это В, то у неё, как и у Г, не будет побед. Значит, дважды вничью сыграла команда Б. С учётом числа побед и ничьих перечислим для каждой команды счёт в её матчах: А — $1:1$, $2:1$, $3:*$, Б — $1:1$, $2:1$, $3:3$, В — $1:*$, $2:3$, $3:*$, Г — $1:*$, $2:3$, $3:3$ ($*$ означает, что возможны варианты). В этом списке каждая цифра должна встретиться ровно по 8 раз. Цифры 1 и 3 действительно встречаются по 8 раз, значит, вместо звёздочек везде нужно поставить цифру 2. Осталось распределить счёт по матчам, находя к каждому счёту «парный». Про ничьи ясно: А–Б — $1:1$, Б–Г — $3:3$. Команда В могла сыграть со счётом $2:3$ только с А, а со счётом $3:2$ — только с Г. Для остальных счетов у каждой команды есть только один соперник. Порядок матчей мог быть таким: А–Б, А–Г, Б–В, А–В, В–Г, Б–Г.

Д3. Таблица забитых и пропущенных мячей такова:

	Шотландия	Уэльс	Англия	Ирландия
Шотландия		2 : 1	3 : 0	2 : 0
Уэльс	1 : 2		0 : 0	2 : 1
Англия	0 : 3	0 : 0		2 : 0
Ирландия	0 : 2	1 : 2	0 : 2	

Можно рассуждать, например, так. Англия в матче с Шотландией пропустила три мяча, но столько же она пропустила в общей сложности, поэтому в остальных матчах Англия не пропустила ни одного мяча. Ирландия проиграла все матчи, следовательно, Англия у неё выиграла и, значит, сыграла вничью с Уэльсом $0:0$. Так как Англия забила 2 мяча, она выиграла у Ирландии $2:0$.

Поскольку Уэльс забил и пропустил по три мяча, а с Англией сделал «сухую» ничью, в его играх с Ирландией и Шотландией было всего забито шесть мячей. Но в играх этих трёх команд между собой было забито восемь мячей (4 забила Шотландия, 3 — Уэльс, 1 — Ирландия). Значит, в матче Шотландия — Ирландия было забито два мяча, а поскольку Шотландия этот матч выиграла, он закончился со счётом 2 : 0. Теперь результаты остальных матчей восстанавливаются однозначно.

Д4. Ответ: результаты состоявшихся матчей таковы (н/б означает, что матч ещё не сыгран):

	А	Б	В	Г	Д
А		н/б	н/б	2 : 1	2 : 0
Б	н/б		1 : 1	1 : 0	н/б
В	н/б	1 : 1		2 : 2	н/б
Г	1 : 2	0 : 1	2 : 2		н/б
Д	0 : 2	н/б	н/б	н/б	

Поскольку суммарное количество забитых командами мячей равно 11, а пропущенных — 12, опечатка допущена в графе «Мячи». При этом команда Б, выигравшая одну из двух своих встреч и завершившая вничью вторую, должна забить больше, чем пропустить. Значит, правильное соотношение мячей у этой команды 1 : 0 или 2 : 1. Далее, команда А свои две победы не могла одержать в играх с командами Б и В, не имеющими поражений. Следовательно, она выиграла у Д со счётом 2 : 0 и у Г со счётом 2 : 1. В двух своих оставшихся матчах команда Г проиграла команде Б и сыграла вничью с В, забив в этих играх два мяча и пропустив три. Тогда команда В хотя бы один из своих трёх мячей забила команде Б. Но команда Б всего пропустила не больше одного мяча. Значит, встреча между Б и В закончилась со счётом 1 : 1. Соответственно, команды В и Г сыграли со счётом 2 : 2, а команда Б выиграла у Г со счётом 1 : 0.

Д5. Ответ: команды А и Б сыграли вничью, исход последнего матча неизвестен, а все остальные матчи выиграла команда Г.

Общее количество матчей равно $\frac{3+3+3+7}{2}=8$. Команда Б сыграла 7 матчей и не участвовала в первом матче, то есть участвовала во всех остальных. Во втором матче участвовала также В, следовательно, в нём не участвовали ни А, ни Б, сыгравшие первый матч. Значит, они сыграли вничью. Поскольку команда Г участвовала во всех последующих матчах, все матчи, кроме последнего, она выиграла. Исход последнего матча мог быть любым, так как противоречия с условием ни в каком случае не возникает.

Д6. Так как второй участник не имел поражений, а первый — ничьих, встреча между ними закончилась победой второго. Значит, первый набрал не больше трёх очков. Все набрали разное число очков, следовательно, второй набрал не больше 2,5 очков, третий — не больше 2, четвёртый — не больше 1,5 и пятый — не больше 1. С другой стороны, в сумме все участники набрали 10 очков, то есть все приведённые выше неравенства на самом деле являются равенствами. Отсюда получаем, что первый участник выиграл у всех, кроме второго, а второй сыграл вничью со всеми, кроме первого (так как поражений у него нет). В остальных играх третий набрал 1,5 очка, четвёртый — 1 и пятый — 0,5 очка. Но только один из них не имел побед, значит, третий выиграл у четвёртого, четвёртый у пятого, а третий с пятым сделали ничью, см. таблицу (В означает выигрыш, П поражение, Н ничью):

	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
1-й		П	В	В	В
2-й	В		Н	Н	Н
3-й	П	Н		В	Н
4-й	П	Н	П		В
5-й	П	Н	Н	П	

Д7. Ответ: 12 очков.

Ясно, что первые две команды сыграли соответственно 1 и 2 раза вничью. Третья команда не могла все 5 очков набрать ничьими — тогда бы ей пришлось играть 5 раз.

Поэтому 3 очка она набрала за счёт выигрыша, а остаток — сыграв 2 раза вничью. Аналогично последняя команда не могла набрать очки семью ничьими или выигрышем и четырьмя ничьими, значит, у неё два выигрыша и одна ничья.

Рассмотрим 6 матчей внутри этой четвёрки. В них получено в сумме не более $1 + 2 + 5 + 7 = 15$ очков. Но если бы каждый матч закончился чьей-то победой, то в сумме было бы 18 очков. Каждая ничья уменьшает эту сумму на 1, и таких уменьшений было как минимум 3. Однако «внутренняя» ничья увеличивает на 2 сумму в столбце ничьих. Поскольку сумма равна шести, все ничьи внутренние. Больше ничьих в четвёрке не было — оставшиеся три внутренних матча закончились победой одной из команд. Но тогда все очки они получили от внутренних матчей, а от пятой команды им очков не досталось. Значит, пятая команда их всех победила и набрала 12 очков.

Д8. Набрать в трёх матчах три очка можно либо завершив их вничью, либо одержав одну победу и потерпев два поражения. Второй вариант невозможен, так как хотя бы одно из двух поражений вторая команда должна потерпеть от команды, занявшей более низкое место и, следовательно, набравшей меньше трёх очков. Значит, вторая команда все игры завершила вничью. Тогда третья и четвёртая команды не могут иметь побед, то есть игра между ними тоже заканчивается вничью. Поскольку у этих команд не больше двух очков, первой команде они проигрывают.

Д9. Ответ: а) есть; б) нет.

а) Пусть соотношение забитых и пропущенных мячей у команды А 2 : 0, у Б — 1 : 1, у В — 0 : 2. Тогда команда Б забила гол команде В и пропустила от А. Оставшийся гол команда А забила команде В. Таким образом, все три матча закончились 1 : 0, ничьих действительно не было.

б) Пусть в турнире участвовало больше трёх команд и нет ничьих. Тогда найдутся четыре команды такие, что

А победила Б (пусть с разницей в m мячей), а В победила Г (пусть с разницей в n мячей, где $n \geqslant m$). Уменьшим командам А и В количество забитых мячей в этих матчах на m, но зато увеличим им на m количество забитых мячей в матчах А–Г и В–Б. Тогда общее количество забитых и пропущенных у этих четырёх команд не изменится, и в то же время матч А–Б закончится вничью.

Д10. Ответ: 3 очка.

Если бы все матчи закончились вничью, сумма очков в каждом матче составляла бы 2, а общая сумма — 30. Так как в действительности она равна 35, то результативные матчи дали дополнительно 5 очков. Если за победу начислялось x очков, то каждая победа добавляла $x - 2$ дополнительных очка. Значит, 5 делится на $x - 2$, то есть $x - 2$ равно 1 или 5, тогда x равно 3 или 7 соответственно. Если $x = 7$, то $x - 2 = 5$ и результативный матч был всего один. Тогда только одна команда в своих пяти матчах могла набрать больше пяти очков, но на самом деле таких команд четыре. Значит, $x = 3$.

Д11. Ответ: 4.

В каждой встрече команды в сумме получают четыре очка, если встреча завершилась вничью, и пять очков в противном случае. Если бы все 10 встреч закончились вничью, то сумма очков составляла бы 40. Каждая результативная встреча добавляет одно очко. Значит, результативных встреч было 6.

Д12. а) При системе 2–1–0 *сумма всех результатов в турнире равна числу кругов, умноженному на* $n(n - 1)$, где n — количество игроков. Среднее арифметическое результатов равно числу кругов, умноженному на $n - 1$. Игрок А в каждой партии набирает 1 очко, поэтому его результат равен числу сыгранных им партий, то есть опять-таки числу кругов, умноженному на $n - 1$. При переходе к шахматной системе каждый результат делится на 2, поэтому утверждение задачи сохраняется.

б) Следует из предыдущего пункта (проверьте!).

в) Если победитель турнира набрал не больше, чем команда А, то и любой игрок набрал не больше, чем команда А. Но так как не все игроки набрали поровну, кто-то набрал меньше, чем А. Тогда среднее арифметическое результатов меньше, чем результат команды А, что противоречит пункту а).

Д13. Ответ: 6 ничьих.

Из условия следует, что победитель набрал столько очков, сколько остальные команды вместе. Победитель сыграл 4 матча, в каждом набирал не более трёх очков (причём ровно 3 только в случае победы), значит, всего у него не более двенадцати очков. Остальные команды в каждом из шести матчей между собой набрали в сумме не менее двух очков (причём два только в случае ничьей), поэтому в сумме набрали не менее двенадцати очков. Указанное в условии равенство достигается только при двенадцати очках, то есть когда победитель всё выиграл, а все шесть остальных встреч закончились вничью.

Д14. Ответ: а) 8; б) 8.

Приведём *пример* турниров восьми команд.

	1	2	3	4	5	6	7	8	Очки
1		0	2	0	1	2	2	2	9
2	2		1	1	2	1	1	1	9
3	0	1		0	2	1	2	2	8
4	2	1	2		1	1	0	1	8
5	1	0	0	1		0	2	2	6
6	0	1	1	0	2		0	1	6
7	0	1	0	2	0	2		0	5
8	0	1	0	1	0	1	2		5

	1	2	3	4	5	6	7	8	Очки
1		0	3	1	3	1	0	3	11
2	3		1	1	1	1	3	1	11
3	0	1		0	3	1	3	1	9
4	1	1	3		1	1	1	1	9
5	0	1	0	1		0	3	3	8
6	1	1	1	1	3		0	1	8
7	3	0	0	1	0	3		0	7
8	0	1	1	1	0	1	3		7

Оценка. Если команд четыре, то матчей всего шесть. В каждой паре у нижней команды минимум одна победа, поэтому у верхней — минимум две. Итого минимум шесть побед, значит, ничьих не было. Но без ничьих команды с разным числом побед не могут набрать поровну очков.

Невозможность шести команд докажем для пунктов а) и б) отдельно. Обозначим команды сверху вниз А, Б, В, Г, Д, Е, они образуют пары (А, Б), (В, Г), (Д, Е) с равными суммами очков.

а) Число очков однозначно определяется разностью между числом побед и поражений: чем больше разность, тем больше очков. Заметим, что в каждой из пар у верхней команды больше побед, поэтому меньше поражений. Поскольку сумма разностей по всем командам равна 0, то в паре (А, Б) она положительна, а в (Д, Е) — отрицательна. У команды Е есть победа, поэтому у команды Д их минимум две, тогда поражений — минимум 3. Но матчей всего 5, значит, у Д две победы, три поражения, ничьих нет. Аналогично, у команды А есть поражение, поэтому у команды Б их минимум два, ..., у Б три победы, два поражения, ничьих нет. Итак, разность равна $+1$ в паре (А, Б) и -1 в паре (Д, Е), поэтому в (В, Г) разность 0. Поскольку у команды В побед и поражений поровну, то ничьих — нечётное число, аналогично у команды Г. Но команда В могла сыграть вничью только с А и Е (Г она проиграла, а у Б и Д нет ничьих). Значит, у В — одна ничья, аналогично у Г. Однако тогда у В и Г побед поровну — противоречие.

б) Пусть всего у команд p побед и n ничьих, тогда всего набрано $3p + 2n$ очков. Сумма очков, очевидно, чётна, поэтому и p чётно. Поэтому какая-то из трёх пар одержала в сумме чётное число побед. Но тогда в этой паре разность между числом побед верхней и нижней команды тоже чётна. Она положительна, поэтому не меньше двух. Чтобы скомпенсировать очки за победы, нижняя команда должна была минимум 6 раз сыграть вничью, то есть с учётом победы над верхней сыграть не менее семи раз. Противоречие.

Д15. Условиям задачи удовлетворяет турнир, в котором одна из команд одерживает $n-2$ победы, а все остальные встречи заканчиваются вничью.

Д16. Ответ: нет.

Если Билли прав, то он одержал две победы, а Вилли потерпел два поражения, то есть из шести партий турнира результативно завершилось не менее трёх.

Д17. Ответ: а) да; б) нет.

а) Пусть в турнире пяти команд первая выигрывает у пятой, вторая — у третьей, третья — у четвёртой, четвёртая — у второй, а остальные игры заканчиваются вничью. Тогда у первой команды 6 очков, у пятой 3, у остальных 5. Если же аннулировать результаты пятой команды, то у первой останется 3 очка, а у остальных по 4.

б) Чтобы команда К поднялась выше всех остальных команд, все другие оставшиеся должны опуститься ниже неё. Для этого у каждой должно быть вычтено не менее двух очков. Значит, каждая из оставшихся выиграла у дисквалифицированной команды Д. Но Д могла выиграть только у К, поэтому у Д — не более трёх очков. Так как К оказалась на чистом первом месте, она хотя бы раз выиграла. Значит, у К было не менее трёх очков, то есть не меньше чем у Д, и на чистом последнем месте К не была.

Д18. Ответ: да.

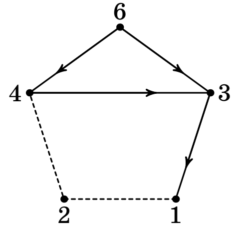
Пример. Пусть в первом туре пары были такие: 1–4, 2–5, 3–6. Во втором: 1–5, 2–6, 3–4. В третьем: 1–6, 2–4, 3–5. Тогда в четвёртом туре первые три шахматиста могут встречаться только между собой. Но трёх участников нельзя разбить на пары.

Д19. Ответ: от восьми до десяти.

Назовем трёх последних неудачниками, а остальных — мастерами. Пусть было k мастеров. Во встречах друг с другом они набрали в сумме $\frac{k(k-1)}{2}$ очков, значит, столько же они набрали против неудачников. Но всего во встречах мастеров с неудачниками разыграно $3k$ очков. Поэтому $\frac{k(k-1)}{2} \leqslant 3k$, откуда $k \leqslant 7$. С другой стороны, мастера набрали в среднем по $k - 1$ очку. Неудачники набрали три очка в играх между собой и $3k - \frac{k(k-1)}{2}$ в играх с мастерами (мы вычли из всех разыгранных между неудачниками и мастерами очков те, что были отданы мастерам). Значит, в среднем неудачники набрали по $\frac{3k - \frac{k(k-1)}{2} + 3}{3}$ очков. Но по условию неудачники набрали меньше мастеров, то же верно и в среднем. Записав и преобразовав неравенство, получим $(k-4)(k+3) > 0$, откуда $k > 4$. Соответственно, всего участников может быть от восьми до десяти.

Примеры турниров с восемью, девятью и десятью участниками строятся достаточно просто: пусть неудачники играют друг с другом вничью, мастера также играют друг с другом вничью, в играх мастеров с неудачниками мастера набирают поровну очков, а неудачники — поровну или почти поровну (отличаясь не более, чем на пол-очка). А именно, при пяти мастерах пусть первый неудачник играет вничью с первыми тремя мастерами, второй неудачник — с последними тремя, третий неудачник — со всеми, кроме третьего, а в остальных случаях мастера выигрывают у неудачников; тогда каждый мастер отбирает у неудачников по 2 очка, набирает 4 очка, а каждый неудачник набирает 2 или 2,5 очка. При шести мастерах первые два играют вничью с первым неудачником, следующие два — со вторым, последние два — с третьим, а в остальных случаях мастера выигрывают у неудачников; тогда каждый мастер отбирает у неудачников по 2,5 очка и набирает по 5 очков, а неудачники набирают по 2 очка. При семи мастерах каждый из мастеров выигрывает у всех неудачников и отбирает по 3 очка, набирая 6 очков, а неудачники набирают по одному очку.

Д20. Ответ: 6 игр.



Команды набрали не менее $1+2+3+4+5 = 15$ очков, значит, было не менее $15 : 3 = 5$ игр. Ровно 5 игр быть не может: тогда есть команда с одним очком, значит, была ничья и набрано меньше пятнадцати очков. Поэтому игр не менее шести. Пример с шестью играми приведён на рисунке: точки — команды, цифры — очки, отрезки — игры, стрелка показывает на проигравшего, пунктирный отрезок — ничья.

Д21. Пусть осталось k участников, занумеруем их в порядке мест, занимаемых после дисквалификации. До дисквалификации у i-го участника было меньше очков, чем у $(i+1)$-го, а после дисквалификации — больше. Значит, в играх с дисквалифицированными i-й набрал по крайней мере на очко меньше. Тогда k-й набрал в этих играх по крайней мере на $k-1$ очко больше, чем первый, то есть не менее $k-1$ очка. Значит, он сыграл с $22-k$ дисквалифицированными не менее $k-1$ встреч. Из неравенства $k-1 \leqslant 22-k$ получаем, что $k \leqslant 11$.

Д22. Ответ: Петя проиграл участникам, занявшим три первых места, и выиграл у остальных.

Девять участников, имеющих не более четырёх очков, проводят друг против друга 36 партий. Значит, в сумме они набирают по крайней мере 36 очков. Поэтому из условия задачи следует, что они набрали по 4 очка в играх друг с другом и проиграли остальным участникам. Следовательно, Петя свои 9 очков набрал против этих участников, а трём остальным проиграл.

Д23. Ответ: 14.

Пусть в турнире участвовало $2k$ команд. Тогда k дисквалифицированных сыграли друг с другом $\frac{k(k-1)}{2}$ игр. Столько же игр сыграли друг с другом остальные k команд. Кроме того, каждая из дисквалифицированных команд провела l матчей с остальными. Следовательно, $k(k-1)+kl=77$. Это уравнение имеет единственное натуральное решение $k=7$, $l=5$.

Д24. Ответ: 15.

Общая сумма мест $3(1+2+\ldots+10)=165$. Если сумма победителя не меньше 16, то у каждого из девяти остальных она не меньше 17. Но $16+9\cdot17>165$ — противоречие.

Вот пример с суммой 15:

Первый судья	5	10	6	1	8	2	7	3	9	4
Второй судья	5	6	1	10	2	7	8	9	4	3
Третий судья	5	1	10	6	7	8	2	4	3	9

Д25. Ответ: 16.

Пусть количество судей n и они принесли x шариков. Тогда количество игроков $2n$, количество туров $2n-1$, количество принесённых ракеток $n-x$. Из условия следует, что $2n-1$ делится на x, причём $\frac{n}{2} < x < n$. Значит, частное от деления меньше четырёх и больше одного. Так как $2n-1$ нечётно, частное не равно двум, и, значит, это 3, то есть $x = \frac{2n-1}{3}$. Тогда $n - x = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3}$.

Из условия следует, что $2n-1$ делится на $n-x$. Но $2n+2 = \frac{n+1}{3}\cdot 6$ тоже делится на $n-x$, поэтому $(2n+2)-(2n-1) = 3$ делится на $\frac{n+1}{3}$. Отсюда либо $\frac{n+1}{3} = 1$, но тогда $n = 2$ и не существует целого x между $\frac{n}{2}$ и n; либо же $\frac{n+1}{3} = 3$, откуда $n = 8$ и количество игроков равно 16. Это значение подходит: было принесено пять шариков и три ракетки, они использовались соответственно по три и по пять раз.

Д26. Обозначим количество игроков через n. Применим метод индукции (см. решение задачи 5.2). Для $k = 1$ утверждение очевидно, а для $k = 2$ доказано в задаче 4.10 (по существу мы используем то же рассуждение). Пусть утверждение верно для $k-1$, и пусть для любых k игроков найдётся выигравший у них всех. Выберем произвольных игроков A_1, ..., A_k. Пусть у них выиграл игрок B_1. Найдётся игрок B_2, выигравший у A_2, ..., A_k, B_1. Аналогично найдётся игрок B_3, выигравший у A_3, ..., A_k, B_1, B_2, и т. д. Все игроки B_1, ..., B_k различны между собой и с A_1, ..., A_k. Действительно, B_j победил B_i при $j > i$. Кроме того, B_1 победил каждого A_i, а все остальные B_j победили B_1. Рассмотрим теперь подтурнир из игроков, победивших

A_k. В нём участвуют все B_i, то есть не менее k игроков. Выберем любых $k-1$ игроков подтурнира. Вместе с A_k они проиграли ещё одному игроку — также, тем самым, выигравшему у A_k. Значит, для подтурнира выполнено предположение индукции: $k-1$ меньше числа участников подтурнира, и для любых $k-1$ игроков подтурнира есть выигравший у них игрок подтурнира. Значит, в подтурнире участвуют не менее чем 2^k-1 игроков. Все они выиграли у A_k, то есть он набрал в исходном турнире не больше $n-2^k$ очков. Но A_k — произвольный игрок, а кто-то из участников турнира набрал не менее $\frac{n-1}{2}$ очков. Значит, $n-2^k \geqslant \frac{n-1}{2}$, откуда и следует утверждение задачи.

Похожими методами можно доказать более сильную оценку $n \geqslant (k+2)2^{k-1}-1$. При $k=2$ и $k=3$ она является точной.

Д27. Заметим, что любые два теннисиста играют в паре три раза. Значит, всего каждый проводит двенадцать встреч. Таким образом, участник А проиграл все свои встречи, а Б три из своих шести поражений потерпел в паре с А. Он шесть раз играл против А, следовательно, ещё три поражения он потерпел в трёх оставшихся встречах. Каждый из трёх остальных игроков проиграл три встречи в паре с А и одну в паре с Б против двух оставшихся игроков, то есть всего у них по четыре поражения и восемь побед.

Д28. Ответ: 6.

После k туров лидирующая команда имеет не больше $3k$ очков. Остальные команды проводят друг с другом $4k$ встреч, в которых в сумме набирают не меньше чем $8k$ очков. Следовательно, команда, занимающая второе место, имеет не меньше чем $\frac{8k}{9}$ очков. С другой стороны, в оставшихся $9-k$ турах вторая команда может набрать на $3(9-k)$ очков больше лидера. Значит, $\left(3-\frac{8}{9}\right)k > 3(9-k)$, то есть $k > 5$. С другой стороны, если в первых шести турах одна команда одерживает 6 побед, а остальные игры заканчиваются вничью, то у лидера 18 очков, у следующих за ним команд по 6, и в оставшихся трёх турах отыграть этот разрыв невозможно.

Примечание. Можно показать, что найдутся четыре команды с одинаковым числом побед.

Д29. Ответ: 31.

Аналогично задаче Д28 наибольший разрыв получается, когда лидер всех обыгрывает, а остальные команды играют между собой вничью.

Д30. Ответ: n любое.

Команды, занявшие места, отличные от первого, проводят друг против друга $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ встреч, в каждой из которых набирают в сумме 2 или 3 очка. При этом всего у них не больше чем $n-1+(n-2)^2$ очков. Следовательно, результативных встреч между этими командами не больше $n-1+(n-2)^2-(n-1)(n-2)=1$. Но если результативная встреча одна, то команда, одержавшая в ней победу, набирает больше чем $n-1$ очко, что противоречит условию. Значит, все команды, кроме занявшей первое место, сыграли между собой вничью. Тогда команда, занявшая чистое второе место с $n-1$ очком, сыграла вничью с занявшей первое место, а остальные ей проиграли, так как набрали меньше. Таким образом, турнир, удовлетворяющий условию, при любом n единственный.

Д31. Ответ: 10.

Из условия задачи следует, что существует команда, имеющая больше побед, чем поражений. Эта команда в k встречах набирает не меньше чем $3+(k-1)=k+2$ очка. Если команда-победитель выиграла меньше четырёх матчей, то она набрала не больше чем $3\cdot3+(k-3-4)=k-2$ очка. Следовательно, у команды-победителя не меньше четырёх побед и не меньше пяти поражений, а потому количество участников не меньше десяти. Эта оценка точна: если одна команда выигрывает 4 матча и проигрывает 5, а остальные встречи заканчиваются вничью, то у победителя 12 очков, у пяти команд — по 11, у остальных четырёх — по 8.

Д32. Ответ: 14 команд.

Пусть всего команд $2n$. Две команды сыграли в общей сложности $2+2(4n-4) = 8n-6$ матчей и, значит, набрали в сумме не больше $3(8n-6) = 24n-18$ очков. Остальные $2n-2$ команды сыграли между собой $(2n-3)(2n-2) = 4n^2-10n+6$ матчей, в которых набрали в сумме не меньше $8n^2-20n+12$ очков (напомним, что в результативном футбольном матче сумма очков равна 3, а в ничейном 2). Из условия задачи получаем $2(24n-18) \geqslant 8n^2-20n+12$, откуда $n \leqslant \dfrac{17+\sqrt{193}}{4} < \dfrac{17+15}{4} = \dfrac{32}{4} = 8$, следовательно, $n \leqslant 7$.

Пример для 14 команд строится исходя из предыдущего. Пусть две команды по разу выиграли друг у друга и все матчи у других команд. Тогда у каждой из них по $3 \cdot 2 \cdot 12 + 3 = 75$ очков, а вместе 150. Остальные команды сыграли между собой $12 \cdot 11 = 132$ матча. Если все они — ничьи, то будет набрано 264 очка, а надо 300. Каждая результативная встреча добавляет по очку, значит, сделаем $300-264 = 36$ встреч результативными. Например, разобьём остальные команды на две группы по 6, и пусть в первом круге каждая команда первой группы выиграет все матчи у команд второй группы. Тогда у команд первой группы будет по $6 \cdot 3 + 16 \cdot 1 = 34$ очка, у второй — по 16 очков, что меньше, чем у победителей.

Д33. Ответ: 3 или 4.

Каждый игрок набрал не более трёх очков. Действительно, если он выиграл m раз, то побежденные им игроки только в играх друг с другом набрали $\dfrac{m(m-1)}{2}$ очков. Из неравенства $m \geqslant \dfrac{m(m-1)}{2}$ следует, что $m \leqslant 3$.

Пусть игрок А набрал 3 очка. Тогда трое проигравших ему набирали очки только в играх между собой. Поэтому если кроме них и А есть ещё игрок Б, то Б должен всех четверых победить и набрать больше трёх очков — противоречие. Значит, в этом случае участников не более четырёх.

Пусть каждый из n участников набрал не более двух очков. Тогда всего набрано не более $2n$ очков. Но эта сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Из неравенства $2n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$ следует, что $n \leqslant 5$. Равенство $n = 5$ достигается только когда каждый набрал ровно по 2 очка. Но тогда для каждого игрока двое им побеждённых набрали в сумме 4 очка — противоречие.

Для случая двух игроков условие, очевидно, не выполнено. Вот турнир трёх игроков: они выигрывают друг у друга по кругу. Вот турнир четверых: один выигрывает у всех, а остальные друг у друга по кругу.

Д34. Ответ: первое.

Из условия следует, что из шести партий между первыми четырьмя игроками лишь одна завершилась результативно. Поскольку игрок, набравший 3 очка, должен выиграть не меньше двух партий, именно он одержал эту единственную победу.

Д35. Предположим, что странный богатырь занял место выше тринадцатого. Тогда количество набравших меньше очков, чем он, превышает 20. Рассмотрим их поединки между собой. Каждый провёл не менее двадцати поединков. Кто-то выиграл не менее половины этих поединков и, следовательно, набрал в них не менее десяти очков. Кроме того, он победил странного — значит, всего получил не менее одиннадцати очков. Странный набрал больше его — значит, не менее двенадцати очков. Но странный победил только тех, кто выше его в турнирной таблице, — следовательно, их не менее двенадцати, и странный занял место не выше тринадцатого.

Поменяем теперь результаты всех матчей на противоположные. Условия задачи по-прежнему выполняются, и по доказанному странный богатырь занял место не выше тринадцатого. Снова поменяем результаты на противоположные. Последовательность мест изменится на обратную. Заметим теперь, что при 33 участниках двадцать первое место — это тринадцатое с конца.

Д36. Ответ: 0.

Пусть общее количество мячей, пропущенных командой А, равно суммарному количеству мячей, забитых остальными командами. Тогда все остальные забивали только команде А. Аналогично, если команда А забила всего столько же, сколько остальные вместе пропустили, то всем им забивала только А. Значит, друг другу остальные команды не забивали. Поэтому в сохранившейся таблице у всех, кроме А, стоит счёт во встрече с командой А. Минимальный пример без нулей: у А $9:9$, у всех остальных $1:1$.

Д37. Ответ: 13, 14 или 15.

Вначале заметим следующее. Пусть некая команда А участвовала в рассматриваемом туре. Если до этого она сыграла чётное число матчей, то после тура оно стало нечётным. И наоборот, если это число было нечётным, то стало чётным. Поэтому команда А входит либо в первую семёрку команд из условия задачи, либо во вторую. Если же команда А в данном туре не участвовала, то количество сыгранных матчей у неё осталось прежним. Если оно чётно, команда А входит в обе семёрки, а если нечётно — ни в одну.

Из сказанного понятно, что если в турнире участвовало чётное количество команд, то они как раз составляют две семёрки из условия задачи и всего команд $7+7=14$. Если в турнире нечётное число команд, то одна из них пропустила данный тур. Если она входит в обе семёрки, то всего команд $1+6+6=13$, а если не входит, то $1+7+7=15$.

Д38. Докажем, что каждой команде осталось сыграть не более двух матчей. Действительно, если команда А не сыграла с Б, В, Г, то, добавив к ним любую пятую команду Д, мы придем к противоречию: по условию А сыграла по крайней мере с двумя из команд Б, В, Г, Д.

Рассмотрим теперь граф, где ребрами служат несыгранные матчи. Поскольку степень каждой вершины (то есть количество примыкающих к ней рёбер) не больше двух, он распадается на циклы и цепочки. Нетрудно видеть, что матчи в каждой цепочке и каждом чётном цикле можно сыграть за два дня, а в нечётном цикле — за три.

Д39. Ответ: нет.

Так как при удалении одного участника количество очков у оставшихся не увеличивается, смена победителя может произойти только в том случае, когда Иванов теряет хотя бы очко. Следовательно, Иванов у выбывшего участника выиграл.

Предположим, что Петров прав. Тогда Иванов выиграл у всех участников. Но в этом случае он останется победителем при удалении любого участника.

Д40. Ответ: нет.

Пусть Петров прав. При дисквалификации Петрова результат любого игрока либо уменьшается на 1 (если он выиграл у Петрова), либо уменьшается на $\frac{1}{2}$ (если они сделали ничью), либо остаётся прежним (если игрок проиграл Петрову). До дисквалификации результат Иванова превышал результат Сидорова не менее чем на $\frac{1}{2}$, а после дисквалификации — уступает ему не менее чем на $\frac{1}{2}$. Это возможно, лишь если результат Иванова уменьшился на 1 (то есть Иванов выиграл у Петрова), а результат Сидорова остался прежним (то есть он Петрову проиграл). Но в варианте с дисквалификацией Сидорова мы точно так же получаем, что Петров проиграл Сидорову! Значит, утверждение Петрова неверно.

Д41. Ответ: нет.

Пусть никто из троих не ошибся, и пусть количество игроков равно n. Упорядочим арбитров по возрастанию количества встреч, которые они судили. Тогда первый арбитр судил не менее одной встречи, второй — не менее двух и т. д. Так как все встречи Иванова судили разные арбитры, количество арбитров не меньше $n-1$. Поскольку в турнире всего $\frac{n(n-1)}{2} = 1+2+\ldots+(n-1)$ встреч, количество арбитров в действительности равно $n-1$, и они судили соответственно 1, 2, ..., $n-1$ встречу. Значит, все арбитры судили встречи Иванова. Поэтому одну из его встреч судил арбитр, судивший только одну встречу. По тем же причинам он судил одну из встреч Петрова, а также Сидорова. Но в единственной встрече, которую он судил, участвовали только два игрока — противоречие.

Д42. Ответ: 6.

Команды набрали вместе не менее $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ очков, поэтому было не менее $\frac{15}{3} = 5$ встреч. При этом если встреч ровно 5, то и очков от одного до пяти, и в каждой встрече набиралось в сумме 3 очка. Но тогда ничьих не было, и одно очко никто не набрал — противоречие. Значит, игр не менее шести.

Приведём пример с шестью играми. Пусть первая команда выиграла у четвёртой и пятой, вторая — у третьей, третья — у пятой, а четвёртая сыграла вничью со второй и пятой. Тогда у команд соответственно 6, 4, 3, 2 и 1 очко.

Д43. Разобьём команды на группы с одинаковым числом побед. Допустим, в каждой группе не более двух команд. Тогда групп не менее $\frac{n}{2}$. Вычитание одной победы при сохранении количества очков означает прибавление трёх ничьих. Наименьшее число ничьих не меньше нуля, поэтому наибольшее не превосходит $3\left(\frac{n}{2}-1\right)$. Но оно не больше числа игр, то есть $n-1 \geqslant 3\left(\frac{n}{2}-1\right)$, откуда $n \leqslant 4$. Однако по условию $n \geqslant 5$. Противоречие.

Д44. Ответ: $2n-1$.

Оценка: поскольку n команд, не имеющих выигрышей, набрали разное количество очков, у них разное количество проигрышей. По принципу Дирихле наибольшее из этих количеств не меньше $n - 1$. Значит, имеется не меньше $n - 1$ команд с выигрышами.

Пример: пусть имеется $2n - 1$ команд, первая команда выиграла у $(2n - 1)$-й и сделала ничью с остальными, вторая выиграла у $(2n - 1)$-й и $(2n - 2)$-й и сделала ничью с остальными, ..., $(n - 1)$-я сделала ничью со всеми последующими, а эти n команд сыграли между собой вничью.

Д45. Ответ: а) при $n \geqslant 3$; б) при $n \geqslant 5$.

Для двух команд такое невозможно: ничьих поровну, значит, разность при пересчёте не изменится. Вот пример для $n \geqslant 3$: команда А у каждой из остальных один раз выиграла, один раз проиграла, а все остальные между собой сыграли вничью. Пар матчей у всех поровну, но пар «победа-поражение» у А больше. При системе 3–1–0 «победа-поражение» даёт на одно очко больше, чем пара ничьих, поэтому А обойдёт все остальные. А при системе 3–2–0 «победа-поражение» даёт на одно очко меньше, чем пара ничьих, поэтому А отстанет от всех остальных.

б) Пусть пересчёт очков сдвинул с первого места на последнее команду А. Допустим, $n \leqslant 4$. Чтобы занять первое место, команда А кого-нибудь да победила, пусть команду Б. Поэтому у Б не более двух ничьих. Но при пересчёте команда Б обошла А, прибавив не менее двух очков, то есть у Б не меньше двух ничьих. Значит, у Б ровно две ничьи. По системе 3–2–0 команда Б набрала 4 очка, а А не меньше трёх, значит, ровно 3. Тогда команда А два матча проиграла и никак не могла по системе 3–1–0 обойти выигравшую у неё команду.

Вот пример для $n \geqslant 5$. Разобьём все команды, кроме А, на две группы из не менее чем двух команд. Добавим А в каждую из групп. Пусть в каждой группе все выиграют друг у друга по циклу, а все остальные матчи завершатся вничью. Итого у А две победы, два поражения и по $n - 5$ ничьих, у остальных — по одной победе, одному поражению и по $n-3$ ничьих. Откинем у каждой команды одну победу, одно поражение и $n-5$ ничьих. У А останется победа + поражение, у остальных — по две ничьих. При системе 3–1–0 это даст команде А на одно очко больше, а при системе 3–2–0 на одно очко меньше.

Д46. Ответ: 8.

Всего в турнире проводится 10 встреч и сумма очков в каждой не больше трёх, поэтому команд, набравших не меньше восьми очков, может быть не больше трёх. С другой стороны, если одна команда проигрывает все матчи, а остальные во встречах между собой имеют по одной победе и одному поражению, то четыре команды набирают по 7 очков.

Д47. а) Все команды, кроме первой, забили в сумме 20 мячей. Из них 17 мячей забито первой команде. Значит, в играх между собой эти 5 команд забили 3 мяча. Всего между ними было 10 матчей, и из них голы забивались не более чем в трёх. Следовательно, не менее семи матчей — нулевые ничьи.

б) У первой команды в её 17 матчах в воротах побывало 36 мячей. Значит, был хотя бы один матч, в котором было в сумме забито не менее трёх мячей. Рассмотрим соперника первой команды в этом матче. У этой команды забито и пропущено в сумме 18 мячей, следовательно, на 16 остальных её матчей приходится не более пятнадцати мячей. Но тогда в каком-то из её матчей забитых и пропущенных мячей не было, то есть он должен был закончиться нулевой ничьей.

Д48. Ответ: а) 2 тура; б) 5 туров.

а) Больше двух туров гарантировать нельзя. Действительно, пусть спортсмены какой-то страны А сильнее всех остальных. Тогда после двух туров среди шестнадцати оставшихся будет не менее девяти человек из страны А. В какой-то из восьми пар третьего тура встретятся двое из страны А.

Два тура провести можно. Разобьём спортсменов на шестнадцать групп по четыре человека, в каждой — спортсмены четырёх стран. Например, так (страны обозначены номерами, 1 — страна-организатор): по пять групп (1, 2, 3, 4) и (1, 5, 6, 7), по две группы (2, 3, 4, 5), (2, 3, 6, 7) и (4, 5, 6, 7). В первом туре каждая группа разбивается на пары, во втором играют победители пар одной группы.

б) После очередного тура будет оставаться соответственно 150, 75, 38, 19, 10, 5, 3, 2, 1 спортсмен. Если 10 спортсменов какой-то страны А сильнее всех остальных и в первых турах не встречались между собой, то будут вынуждены встретиться, когда кроме них никого не останется, то есть после пяти туров.

Покажем, как избежать встреч соотечественников в первых пяти турах. В каждом туре надо распределить не менее девятнадцати спортсменов, при этом в делегации любой страны не более десяти человек. Рассмотрим общую ситуацию: осталось распределить по парам n человек, в самой многочисленной делегации — k спортсменов и $n \geqslant 2k-1$. При $n = 1$ единственный спортсмен остаётся без пары и выходит в следующий круг без игры. Иначе делегаций минимум две. Сведем в пару спортсменов из двух самых больших делегаций. Покажем, что для оставшихся условие по-прежнему выполняется, поэтому можно выбрать следующую пару и т. д. Если k уменьшилось на 1, то $n-2 \geqslant 2(k-1)-1$. Если k не изменилось, то было не менее трёх делегаций численности k, то есть $n \geqslant 3k$, поэтому $n-2 \geqslant 3k-2 = (2k-1)+(k-1) \geqslant 2k-1$.

Д49. Ответ: Никанор.

Заметим, что общее количество сыгранных партий равно $\dfrac{10+15+17}{2} = 21$. Если трое играют навылет, то любой игрок пропускает не больше одной партии подряд. Поэтому если Никанор играл в первой партии, то из остальных двадцати партий он играл хотя бы в половине, и всего получается не меньше одиннадцати партий — противоречие. Значит, Никанор впервые вышел к столу во второй партии. Если бы он эту партию выиграл, то играл бы и в третьей, а также не менее чем в девяти из восемнадцати оставшихся партий. Но тогда бы он сыграл больше десяти раз. Значит, вторую партию Никанор проиграл.

Замечание. Поскольку в задаче явно сказано, что такое случилось, пример приводить не надо. Однако убедиться, что условие непротиворечиво, тоже не сложно: если первые 12 встреч выиграл Агафон, а остальные — Филимон, то количество игр сходится.

Д50. Ответ: нет, игра была неинтересная.

Поскольку $512 = 2^9$, в турнире было 9 туров. Выстроим цепочку игроков от номера 1 до победителя, где каждый следующий выиграл у предыдущего. В цепочке не более десяти человек, причём их ровно 10, только если в цепочке есть финалист, проигравший победителю в последнем туре. Аналогичную цепочку выстроим от номера 512 до победителя. Если в обеих цепочках по 10 человек, выкинем из обеих победителя и соединим их в одну по финалисту, иначе соединим по победителю. В любом случае в объединённой цепочке не более восемнадцати человек (возможно, в ней есть повторы). Разность между крайними равна 511, есть 17 промежутков между соседями, поэтому на каком-то из промежутков разность не меньше $\frac{511}{17} > 30$.

Д51. Поскольку $256 = 2^8$, в турнире было 8 туров. Расположим игроков по уровням: выбывшие в первом туре, во втором туре, ..., в восьмом туре (там один финалист), на девятом уровне — победитель турнира. Проведём стрелку от выигравшего к проигравшему. Заметим, что стрелка всегда идет на более низкий уровень. Допустим, участник с номером 1 одержал более двух побед. Тогда он находится как минимум на четвёртом уровне. Отметим пути по стрелкам от победителя до номера 1 и до номера 256. Путь до номера 256 состоит не более чем из восьми стрелок, причём их ровно восемь, если в путь входит стрелка от победителя к финалисту. Аналогично цепочка от победителя к номеру 1 состоит не более чем из пяти стрелок, причём их ровно пять только когда есть стрелка от победителя к финалисту. Если в путях есть общие стрелки, выкинем их и объединим цепочки в один путь. Всего в нем будет не более двенадцати стрелок. Идя по нему, получим цепочку игроков, где каждые два соседа сыграли между собой. Но тогда разность на каждой стрелке не более двадцати. С другой стороны, разность между крайними равна $256 - 1 = 255$, поэтому на какой-то из двенадцати стрелок она не меньше $\frac{255}{12} > 20$. Противоречие.

Д52. Ответ: могут.

Обозначим сильнейшего борца S, слабейшего W. Разобьём борцов на 13 четвёрок. В каждой четвёрке проведём такие поединки: разбив четвёрку на пары, узнаем победителей в парах (пусть $a > b$ и $c > d$), затем узнаем победителя в паре победителей (пусть $a > c$). Борец a победил двоих, значит, $a \neq W$. Поэтому $b \neq S$ и $c \neq S$. Сравним a и d. Если $a > d$, то $d \neq S$, поэтому a — сильнейший в четвёрке. Тогда переходим к следующей четвёрке. Если такая ситуация повторится во всех четвёрках, то мы за $4 \cdot 13 = 52$ поединка отсеем 39 борцов, причём среди тринадцати оставшихся не будет W. Разбивая оставшихся как угодно на пары и отсеивая проигравшего, мы ещё за 12 поединков найдем среди них S.

Допустим, однако, что в какой-то четвёрке при четвёртом поединке оказалось, что $a < d$. Тогда возник цикл из трёх борцов: $a > c > d > a$. Ясно, что такое возможно, только если в цикле есть и S, и W: а именно, $c = W$, $d = S$ либо $d = W$, $a = S$. Сравним b и d ($b \neq S$). Если $b > d$, то $a = S$, а если $b < d$, то $d = S$. Значит, мы нашли S не более чем за 53 поединка.

Д53. Разделим знатоков этого года на три группы по n человек. Припишем каждой группе свой цвет и занумеруем в ней участников от 1 до n. Для каждой прошлогодней тройки сделаем по 9 новых троек: 3 тройки, когда все номера относятся к одноцветным участникам, и 6 троек, когда участники с данными номерами — трёх разных цветов. Кроме того, добавим ещё n троек, когда номера участников одинаковы, но они — трёх разных цветов.

Пусть участники M и N имеют номера m и n соответственно. Если, например, $m < n$, то в прошлом году участники с такими номерами входили ровно в одну тройку (k, m, n). Если M и N — разного цвета, то они встретятся в разноцветной тройке (k, m, n), причем цвет k определяется однозначно: он отличается от цветов M и N.

Если M и N — одинакового цвета, то они встретятся в одноцветной тройке (k, m, n), причем цвет k определяется однозначно: он совпадает с цветами M и N.

Пусть теперь $m = n$. Тогда M и N — разного цвета. Они встретятся в разноцветной тройке (m, m, m). Таким образом, каждый с каждым встретится ровно один раз.

Д54. Ответ: Могло.

Обозначим игроков А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И. Пусть в следующих 12 партиях кругового турнира первый игрок победил второго: А–Б, А–В, А–Г, Б–Д, Б–Е, В–Ж, Г–Д, Д–А, Д–И, Е–А, Ж–А, И–А, а остальные партии закончились вничью. Тогда А набрал 3 очка, Б — 4 очка, остальные — по 3,5. Пусть в четвертьфинале кубка игрались партии А–Г, Б–Е, В–Ж и Д–И, в полуфинале А–В и Б–Д, в финале А–Б. Шахматист А набрал меньше всех в круговом турнире и выиграл кубок.

Раздаточный материал

Занятие 1. Восстанови результаты

Задача 1.1. Команда «Вымпел» во втором матче турнира забросила больше шайб, чем в первом, а в третьем матче — на 6 шайб меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трёх матчах «Вымпел» забросил 6 шайб. Мог ли «Вымпел» выиграть все 3 матча?

Задача 1.2. Аня, Боря, Валя и Гена сыграли однокруговой турнир в крестики-нолики и начали заносить результаты в турнирную таблицу (В — число выигрышей, Н — ничьих, П — поражений). Они успели заполнить только 4 клетки (см. рис.). Заполните все остальные клетки.

	Аня	Боря	Валя	Гена	**В**	**Н**	**П**
Аня						2	
Боря						1	
Валя					3		
Гена							1

Задача 1.3. Ниже приведена таблица группового этапа одного из чемпионатов мира по футболу. Определите счёт во всех матчах.

	В	Н	П	М
Италия	1	2	0	1 : 0
Уругвай	1	1	1	2 : 1
Швеция	1	1	1	2 : 2
Израиль	0	2	1	1 : 3

Каждая команда сыграла с каждой один матч, В — число побед команды, Н — число ничьих, П — число поражений, М — количество забитых (слева) и пропущенных (справа) мячей.

Задача 1.4. а) В однокруговом шахматном турнире с восемью участниками все партии закончились вничью. Сколько всего очков набрали участники? А сколько всего партий было сыграно?

б) В незаконченном шахматном турнире сыграно пока только 15 партий. Сколько всего очков успели набрать участники?

в) Закончился однокруговой шахматный турнир с 16 участниками. Чему равна сумма набранных очков?

Задача 1.5. В однокруговом турнире четырёх команд с начислением очков по системе 2–1–0 команда А набрала 5 очков, Б — 2 очка, В — 1 очко. Какое место заняла команда Г?

Задача 1.6. Команда «Метеор» в третьем матче турнира забросила втрое больше шайб, чем в первом, а во втором и четвёртом матчах — в сумме на 8 шайб меньше, чем в первом и третьем вместе взятых.

Известно, что в этих четырёх матчах «Метеор» забросил не более 11 шайб. Какое наибольшее число из этих матчей он мог выиграть?

Задача 1.7. В однокруговом турнире участвовали шахматисты А, Б, В, Г и Д. При равенстве очков место определялось по дополнительным показателям. Известно, что Б занял второе место и набрал больше очков, чем В, Г и Д вместе. Каков результат партии между А и Б?

Задача 1.8. В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

Задача 1.9. В футбольном турнире пяти команд победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

Задача 1.10. В однокруговом шахматном турнире у каждого из игроков чего-то было столько, сколько у остальных вместе: у Оси — очков, у Нины — ничьих (в одной был пат), у Проши — проигрышей, а у Зины — зевков ферзя. Восстановите результаты всех партий.

Задача 1.11. В однокруговом шахматном турнире участвовали 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Занятие 2. Простейшие факты о турнирах

Задача 2.1. В однокруговом турнире участвовали n шахматистов.

а) Сколько партий сыграно и сколько набрано очков?

б) Очки считались по футбольной системе. Какова наибольшая и какова наименьшая возможная сумма очков?

Задача 2.2. а) Докажите, что в любой момент число участников турнира, завершивших до этого вничью нечётное число партий, чётно.

б) В турнире участвуют 15 шахматистов. Возможна ли такая ситуация, что к некоторому моменту турнира каждый из них сыграл ровно 7 партий?

Задача 2.3. Несколько команд участвуют в однокруговом футбольном турнире. Докажите, что независимо от расписания игр в любой момент найдутся хотя бы две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

Задача 2.4. Докажите, что если в однокруговом турнире все участники, кроме одного, набрали одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл.

Задача 2.5. Докажите, что если в однокруговом турнире любые два игрока набрали разное количество очков, а ничьих не было, то занявший первое место выиграл у всех, занявший второе — у всех, кроме первого, ..., последний всем проиграл.

Задача 2.6. а) Сколько шахматистов играло в однокруговом турнире, если всего в этом соревновании было сыграно 190 партий?

б) Сколько шахматистов играло в однокруговом турнире, если всего было набрано больше 50, но меньше 60 очков?

в) Сколько команд играло в однокруговом турнире, если всего было набрано больше 50, но меньше 60 очков по системе 2–1–0?

Задача 2.7. В шахматном турнире каждый участник выиграл белыми столько же партий, сколько все остальные вместе чёрными. Докажите, что у всех поровну побед.

Задача 2.8. Шахматист сыграл в турнире 20 партий и набрал 12,5 очков. На сколько больше он выиграл партий, чем проиграл?

Задача 2.9. а) Шахматист сыграл в турнире p партий и победил на r раз больше, чем проиграл. Сколько очков он набрал?

б) В шахматном турнире сумму очков заменили на разность между числом побед и числом поражений. Изменится ли распределение мест шахматистов?

в) В футбольном турнире было сыграно m матчей, из них v закончились победой одной из команд. Чему равна сумма набранных командами очков?

Задача 2.10. В однокруговом турнире была применена система подсчёта очков 2–1–0. Вася набрал очков меньше Пети. Может ли у него стать очков больше, чем у Пети, если результаты пересчитать

а) по шахматной системе (за победу 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$, за поражение 0),

б) по футбольной системе (за победу 3 очка, за ничью 1, за поражение 0)?

Задача 2.11. В соревнованиях по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвует 47 боксёров. Сколько поединков надо провести, чтобы определить победителя?

Занятие 3. Примеры и контрпримеры

Задача 3.1. В однокруговом турнире победитель набрал больше очков, чем любая другая команда. Может ли какая-то другая команда иметь больше побед, если очки считаются

а) по системе 2–1–0,

б) по футбольной системе?

Задача 3.2. В однокруговом турнире каждый участник играет в день не более одного раза.

а) Можно ли провести турнир девяти команд за 8 дней?

б) Как провести турнир девяти команд за 9 дней?

в) Как провести турнир десяти команд за 9 дней?

Задача 3.3. В однокруговом турнире участвовали 11 команд. Назовём игру *косой*, если в ней встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечётном числе игр этого турнира.

а) Мог ли турнир пройти без косых игр?

б) Могла ли за весь турнир случиться ровно одна косая игра?

Задача 3.4. В однокруговом турнире десяти команд команда А набрала очков больше любой другой, а Я — меньше любой другой. Какой наименьший разрыв в очках может быть между командами А и Я, если очки считаются

а) по системе 2–1–0,

б) по футбольной системе?

Задача 3.5. В однокруговом турнире участвуют восемь шахматистов. Какое наименьшее количество дней может длиться этот турнир, если каждый его участник играет не более одной партии в день и никакие две партии подряд не играет чёрными фигурами?

Задача 3.6. В круговом турнире стран Балтии играли 6 футбольных команд (по две от Латвии, Литвы и Эстонии). Все три матча каждого тура проходят одновременно. Есть три судейские бригады — по одной из каждой страны. Можно ли так составить расписание туров и судей, чтобы каждая бригада не судила никакой матч игроков своей страны с соперниками из другой страны?

Задача 3.7. Вася, Петя и Коля сыграли в шахматы несколько кругов. По сумме очков победил Петя, вторым стал Вася, а третьим — Коля. Могло ли быть так, что у Коли было больше всех побед, а у Пети — меньше всех?

Задача 3.8. а) В однокруговом футбольном турнире все команды набрали разное число очков. Может ли быть так, что при начислении очков по системе 2–1–0 все команды также наберут разное число очков, а последовательность мест изменится на противоположную?

б) Может ли так быть в двухкруговом турнире?

в) Может ли так быть, если турнир проводится в несколько кругов?

Задача 3.9. В однокруговом турнире все команды набрали разное число очков (по системе 2–1–0) и каждая хотя бы раз победила. Каково наименьшее возможное число команд?

Задача 3.10. В однокруговом футбольном турнире все участники, кроме победителя, набрали поровну очков. Каков наименьший возможный отрыв победителя?

Задача 3.11. В футбольном турнире участвовали 16 дворовых команд. Встречи шли не по расписанию, а кто с кем договорится. Оказалось, что каждая команда в своём k-м матче забила k голов. Какое наименьшее число ничьих могло быть в турнире?

Занятие 4. Алгебра турниров

Задача 4.1. Среди участников кругового шахматного турнира мальчиков втрое больше, чем девочек. Ничьих не было, а в сумме мальчики набрали столько же очков, сколько и девочки. Кто занял первое место: мальчик или девочка?

Задача 4.2. В однокруговом турнире участвовало 20 команд. Могло ли оказаться, что каждая из команд выиграла столько же матчей, сколько сыграла вничью?

Задача 4.3. Как известно, в любом турнире суммарное количество побед равно суммарному количеству поражений. Докажите, что если не было ничьих, то суммы квадратов этих количеств тоже одинаковы.

Задача 4.4. Какой максимальный разрыв может быть между результатами шахматистов, занявших соседние места в круговом турнире с n участниками?

Задача 4.5. В шахматном турнире некоторые из n участников были мастерами, остальные — гроссмейстерами. Оказалось, что каждый участник набрал против мастеров столько же очков, сколько против гроссмейстеров. Докажите, что n — квадрат натурального числа.

Задача 4.6. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель выиграл у всех и набрал очков в 5 раз меньше, чем все остальные. Сколько было участников?

Задача 4.7. Могут ли в однокруговом турнире пятнадцати шахматистов какие-то четыре участника набрать в сумме больше очков, чем все остальные вместе?

Задача 4.8. Несколько шахматистов должны были провести турнир в один круг. Два игрока, сыграв поровну партий, выбыли из турнира. В результате состоялось 23 партии. Играли ли выбывшие шахматисты друг с другом?

Задача 4.9. Сыграв однокруговой турнир, все n шахматистов набрали разное число очков. Какова наименьшая возможная разность очков между первым и последним местом?

Задача 4.10. Докажите, что если в однокруговом турнире для любых двух участников найдётся выигравший у обоих, то участников не меньше семи.

Задача 4.11. В каждом туре однокругового турнира все встречи проводились одновременно, каждую встречу судил один арбитр, и каждый арбитр судил в каждом туре. Будем говорить, что игрок и арбитр встретились, если арбитр судил встречу с участием этого игрока. Пусть количество арбитров равно n, а игроков $2n$. Докажите, что некоторый игрок встретился более чем с $\sqrt{n-1}$ арбитрами.

Занятие 5. Турниры, графы и комбинаторика

Задача 5.1. Рассмотрим турнир n участников без ничьих. Докажите, что можно занумеровать участников так, что первый выиграл у второго, второй у третьего, ..., $(n-1)$-й у n-го.

Задача 5.2. В круговом турнире с 2^n участниками не было ничьих. Докажите, что можно выбрать и занумеровать $n+1$ участников так, что каждый начиная со второго победил всех участников с меньшими номерами.

Задача 5.3. Шестнадцать команд из шестнадцати стран провели однокруговой турнир. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех этих странах, кроме своей родины?

Задача 5.4. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

Задача 5.5. Все участники двухкругового шахматного турнира набрали поровну очков. Докажите, что какие-то двое выиграли одинаковое количество партий белыми. (Каждый участник с каждым сыграл одну партию белыми и одну чёрными.)

Задача 5.6. Все участники однокругового шахматного турнира набрали одинаковое количество очков. Известно, что если удалить любого участника и аннулировать его результаты, то количество очков у каждого из остальных участников турнира также будет одинаковым. Верно ли, что все партии турнира закончились вничью?

Задача 5.7. Четыре теннисиста решили провести парный турнир так, чтобы любые двое были партнёрами ровно один раз. Докажите, что найдётся либо теннисист, выигравший все встречи, либо теннисист, проигравший все встречи.

Задача 5.8. В однокруговом турнире треть команд хотя бы раз сыграла вничью, а $\dfrac{3}{4}$ из оставшихся команд хотя бы по разу проиграли. Сколько побед было в турнире?

Задача 5.9. В однокруговом турнире принимали участие n спортсменов, имевших номера от 1 до n. Участник с номером 1 сделал одну ничью, участник с номером 2 сделал две ничьих, ..., участник с номером $n-1$ сделал $n-1$ ничью. Сколько ничьих сделал участник с номером n?

Задача 5.10. В однокруговом турнире участвовали 12 теннисистов, никто не проиграл все встречи. Докажите, что найдётся цикл длины 3. (Напомним, что ничьих в теннисе не бывает!)

Задача 5.11. Докажите, что в турнире без ничьих либо существует цикл, включающий всех участников, либо можно разбить участников на две группы так, что любой игрок из первой группы победил любого из второй.

Занятие 6. Проигравший вылетает

Задача 6.1. Турнир по боксу проходил по олимпийской системе, «отдыхающих» не было. При этом 32 человека выиграли боёв больше, чем проиграли. Сколько боксёров участвовало в турнире?

Задача 6.2. а) В розыгрыше кубка участвовали $n > 2$ спортсменов. Арбитр Иванов, судивший финал, не судил больше ни одной встречи. Докажите, что найдётся ещё хотя бы один арбитр, также судивший лишь одну встречу.

б) Докажите, что если количество участников чётно, то кроме Иванова найдутся ещё хотя бы два арбитра, судившие лишь одну встречу.

Задача 6.3. В турнире участвуют 64 боксёра разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Можно ли за 70 боёв выявить двух сильнейших?

Задача 6.4. Ваня, Коля и Петя играли в теннис «на высадку», то есть в каждой партии двое играют, а третий ждёт и в следующей партии заменяет проигравшего (ничьих в теннисе не бывает). В итоге оказалось, что Ваня сыграл 12 партий, а Коля 25 партий. Сколько партий Коля отдыхал?

Задача 6.5. Двое играют в шахматы, а ещё шестеро желающих образуют очередь. Проигравший партию становится в конец очереди; тот, чья очередь подошла, играет с победителем, и так далее (в случае ничьей победителя определяют по жребию). Могут ли к некоторому моменту каждые двое сыграть между собой ровно один раз?

Задача 6.6. а) Пятнадцать боксеров провели турнир по олимпийской системе. В первый день состоялось 5 боёв, во второй 6, а в третий день определился единоличный победитель. Сколько боёв состоялось в третий день?

б) Пятнадцать борцов провели турнир с выбыванием после третьего поражения. В первый день состоялось 15 поединков, во второй — 16, а в третий день единственный невыбывший был объявлен победителем. Сколько поединков состоялось в третий день, если ничьих не было, а победитель потерпел всего одно поражение?

Задача 6.7. В однокруговом чемпионате участвовали 16 команд, и все показали разный результат. Затем среди них был разыгран кубок. Каждую встречу выигрывала команда, занявшая более высокое место в чемпионате. Назовём встречу в розыгрыше кубка неинтересной, если разница мест команд в чемпионате была больше четырёх. Каково наименьшее возможное число неинтересных встреч?

Задача 6.8. Боря, Лёша и Саша играли в шахматы «навылет» (проигравший уступает своё место, при ничьей сменяется игравший белыми). Оставшийся играет в следующей партии фигурами другого цвета. В первой партии Боря играл белыми с Лёшей. Каким цветом играл Лёша с Сашей в последней партии?

Задача 6.9. В турнире по системе «проигравший выбывает» участвовали 55 боксёров. Никакие два боя не проходили одновременно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боёв мог провести победитель турнира?

Задача 6.10. Группа школьников играла в пинг-понг «на победителя». Они установили очередь, вначале играли первый и второй из очереди, а в дальнейшем каждый очередной участник играл с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова сыграли по тем же правилам, но очередь выстроилась в обратном порядке (последний вчера стал первым сегодня, и т. д.). Известно, что каждый сыграл хотя бы раз и в первый, и во второй день. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.

Задача 6.11. В команде 8 силачей разной силы. Тренер может ставить на концы каната любые группы из одного или нескольких силачей. Он хочет выяснить, правда ли, что при перетягивании каната любые двое победят любого одного. Как ему гарантированно проверить это а) за 19 перетягиваний; б) за 13 перетягиваний?

Указатель задач по темам

Средние: 2.4, 4.4, 4.10, 4.11, Д12, Д18.

Футбольная система подсчёта очков: 1.8, 1.9, 2.1б), 2.9в), 2.10б), 3.4б), 3.8, 3.10, Д13, Д14, Д15, Д17, Д20, Д28, Д29, Д30, Д31, Д32, Д42, Д43, Д44, Д45, Д46.

Чередование: 3.3б), 3.5, 6.4, 6.5, Д37, Д49.

Чётность: 1.2, 1.10, 2.2, 3.2, 3.3, 4.8, 4.9, 5.2, 5.3, 5.9, Д2, Д14, Д19, Д25, Д37.

Авторы задач

Большинство использованных в книге задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Их обычно публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах, когда они известны. Проще всего узнать свои собственные задачи, тем более, что кое-какие из них были специально придуманы для этой книги. Других задач с известным автором не так много, но зато почти все — яркие. Спасибо этим авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил фольклорные жемчужины!

А. Блинков: 1.8, 3.4б), 3.6, Д5, Д31

С. Волченков: Д53

А. Грибалко: 3.5

Р. Женодаров: Д20

А. Заславский: 3.4, 3.8, 3.10, Д7, Д17, Д31, Д43, Д47б).

Ю. Лифшиц: 5.3

В. Произволов: 1.11

И. Сергеев: 5.4

С. Токарев: 3.5

Б. Френкин: 4.11, 5.5, 5.9, 6.1, 6.2, 6.10, Д21, Д25, Д35, Д39, Д40, Д41.

А. Храбров: Д20

А. Шаповалов: 1.6, 1.9, 1.10, 3.3а), 6.6б), 6.7, 6.9, 6.11, Д2, Д9, Д36, Д47, Д54.

Оглавление

Учебно-методическое издание

Алексей Александрович Заславский,
Борис Рафаилович Френкин,
Александр Васильевич Шаповалов

Задачи о турнирах

Серия «Школьные математические кружки»

Технический редактор *Е. Горская* Иллюстрации *А. Неледва*

Подписано в печать 31.12.2016 г. Формат $60\times88^1/16$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 6,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru